Textos Académicos

Aritmética

Teoría, Ejemplos y Problemas

Marlon D. Arcila Vanegas
Yeison E. Gómez Noreña

FONDO EDITORIAL ITM

Aritmética.
Teoría, ejemplos y problemas

Marlon D. Arcila Vanegas

Yeison E. Gómez Noreña





Aritmética. Teoría, Ejemplos y Problemas

Primera edición: agosto de 2016
ISBN: 978-958-8743-94-3

AUTORES
Marlon Arcila Vanegas
Yeison Gómez Noreña

Publicación electrónica para consulta gratuita

Instituto Tecnológico Metropolitano
Calle 73 No. 76ª 354
Tel.: (574) 440 5197
http://fondoeditorial.itm.edu.co/
fondoeditorial@itm.edu.co
Medellín – Colombia

Institución Universitaria Colegio Mayor de Antioquia
Carrera 78 No. 65-46
Tel: (574) 2649081
www.colmayor.edu.co/
colmayor@colmayor.edu.co

Arcila Vanegas, Marlon D.
Aritmética: teoría, ejemplos y problemas / Marlon D. Arcila Vanegas, Yeison E. Gómez Noreña. -- 1a ed. – Medellín : Instituto Tecnológico Metropolitano ; Colegio Mayor de Antioquia, 2016.
91 p. – (Textos académicos)

Incluye referencias bibliográficas
ISBN 978-958- 8743-94-3

1. Aritmética I. Gómez Noreña, Yeison E. II. Tít. III. Serie

513 SCDD 21 ed.

Catalogación en la publicación - Biblioteca ITM

Índice general

Prológo 4

1 **Capítulo 1**
Operaciones y conceptos básicos

1.1 Sistema de los números enteros *1*
1.2 Criterios de divisibilidad *7*
1.3 Máximo común divisor *10*
1.4 Mínimo común múltiplo. *11*
1.5 Sistema de los números racionales. *14*
1.6 Adición y sustracción de racionales *17*
1.7 Multiplicación y división de racionales *20*
1.8 Polinomios aritméticos *23*
1.9 Sistema de los números irracionales *26*
1.10 Sistema de los números reales *27*
1.11 Respuesta ejercicios del capítulo *28*

32 **Capítulo 2**
Potenciación

2.1 Potenciación *32*
2.2 Leyes de la potenciación *34*
2.3 Ejercicios resueltos *37*
2.4 Ejercicios del capítulo *39*
2.5 Respuestas a los ejercicios del capítulo. *42*

46 **Capítulo 3**
Radicación

3.1 Radicación *46*
3.2 Leyes de la radicación *49*
3.3 Simplificación de un radical *50*
3.4 Simplificación de cocientes y productos de radicales *53*
3.5 Simplificación de potencias y radicales *54*
3.6 Polinomios aritméticos con potencias y radicales *54*
3.7 Racionalización *55*

3.8 Ejercicios de capítulo *58*
3.9 Respuestas a los ejercicios del capítulo *63*

67 **Capítulo 4**
Logaritmación

4.1 Logaritmación *67*
4.2 Cálculo de logaritmos *68*
4.3 Leyes de los logaritmos *70*
4.4 Simplificación de productos y cocientes de logaritmos. *72*
4.5 Polinomios aritméticos con potencias, radicales y logaritmos *72*
4.6 Ejercicios del capítulo *73*
4.7 Respuestas a los ejercicios del capítulo *74*

75 **Capítulo 5**
Razones y proporciones

5.1 Razones y proporciones *75*
5.2 Regla de tres *76*
5.3 Ejercicios del capítulo *79*
5.4 Respuestas a los ejercicios del capítulo *82*

84 **Capítulo 6**
Problemas suplementarios

6.1 Respuestas a los ejercicios del capítulo *87*
Referencias *88*

Prólogo

La matemática es la reina de las ciencias y la aritmética es la reina de las matemáticas. Ella a menudo se digna a prestar un servicio a la astronomía y a otras ciencias naturales, pero en todas las relaciones, tiene derecho a la primera fila. (Kline, 1972, p.557.)

Esta frase refleja el pensamiento de Karl Friedrich Gauss sobre la aritmética, tema central de este texto, con lo que se quiere comenzar, ya que la autoridad de este matemático es de una notabilidad mayúscula. El valor de esta rama de las matemáticas es prácticamente incuestionable para Gauss, alemán que vivió entre el 30 de abril de 1777 y el 23 de febrero de 1885.
En una ocasión se le interrogó a Pierre-Simon Laplace sobre el matemático alemán más importante, a lo cual este respondió que era Johann Friedrich Pfaff; pero su interlocutor replicó que por que no Gauss, y entonces este respondió: "Gauss es el matemático más importante de todo el mundo", este juicio ha sido compartido por toda la comunidad académica, tanto así que en nuestros días se le reconoce, a Gauus, como el *Matemático más grande desde la antigüedad* y el *Príncipe de los matemáticos*. Sólo él y Arquímedes, al cual se le conoce como el *Dios de las Matemáticas*, son los únicos que ostentan un apelativo superlativo en relación a las mentes más brillantes de la humanidad, y que guardan alguna relación con la producción científica.
Por lo anterior se quiere resaltar dos ideas fundamentales acerca de las razones por las cuales se considera escribir un texto de aritmética para estudiantes de primeros semestres de universidad y de últimos años de bachillerato. La primera es que, para Gauss, hay ramas de las matemáticas y no una sola matemática; cada una de ellas es completa en tanto sus postulados y la forma como se estructura en función de su *objeto* de estudio, que, en este caso, son los sistemas numéricos, las relaciones y propiedades que se cumplen, como consecuencia de las operaciones entre los números. En segundo lugar, la aritmética está presente como un eje transversal en todas las áreas del conocimiento que requieren de este lenguaje para expresar sus ideas y cuantificar el mundo; en este sentido, Gauss sostiene: *Las matemáticas deben reflejar el mundo de una forma real*, echo apenas evidente, como un postulado, ya que las personas, en general, conocen y usan las cuatro operaciones aritméticas fundamentales, y deben recordar una buena cantidad de números como identificación personal, teléfonos, direcciones y contraseñas. Es así como escribir un texto dedicado al estudio de las ideas centrales básicas aritméticas es necesario para quienes se adentran en el estudio de las matemáticas, como eje transversal en su proceso de formación universitaria, en un medio donde el valor y significado de las distintas ramas de las matemáticas se hace prácticamente irreconocible, a causa de la integración que se ha querido hacer de ellas por medio de la concepción unificadora de la teoría de conjuntos. No es que se ostenten los conocimientos ni mucho menos la formación, como para menospreciar tal concepción; tampoco se busca criticar en sí misma a la teoría de conjuntos. Esa función se la dejamos a Georg Cantor, Bertrand Russell o Kurt Gödel.
El objetivo de este libro guarda relación con la intensidad horaria, número de cursos de matemáticas de primer semestre y cantidad de contenidos temáticos abordados en los cursos de matemáticas operativas, que evidencia que al estudiante se le deben brindar los elementos operativos y conceptos mínimos, en función de las temáticas que necesita, para dar respuesta a los planes de estudio que tienen la mayoría de las universidades, que, en su totalidad, están enfocadas al estudio del cálculo, la estadística, matemáticas financieras y materias relacionas con costos, presupuestos y economía, áreas de formación cuyo pre requisito son la aritmética, el álgebra y la geometría analítica.

Este es un texto de aritmética en el cual se tratan de forma simple y concisa los conceptos, sin considerar que para los lectores, este es un primer acercamiento a la aritmética. Se busca que sea un documento para afianzar las ideas ya vistas en la primaria y el bachillerato, optando por dar prelación al uso y comprensión de los conceptos y propiedades de la aritmética, antes que al formalismo propio de las ciencias exactas, sin menoscabo del lenguaje simbólico y preciso que se debe usar en ellas.

¿A quién va dirigido este texto?

Se ha pensado esta obra para estudiantes de últimos años de bachillerato y de primeros semestres de universidad de cualquier programa académico que contemple en su plan de estudios la matemática, además de asignaturas que la usen como su lenguaje, por ejemplo: economía, estadística, costos, presupuestos, etc. De igual manera, para estudiantes que requieran de preparación para olimpiadas de matemáticas o exámenes de admisión para la universidad, dado que los últimos capítulos cuentan con ejercicios NO algorítmicos, que requieren de imaginación y uso creativo de los conceptos de número y operación. Es por esto por lo que la estructura de cada uno de los capítulos se conforma de una serie de ejemplos, por medio de los cuales se da claridad en cuanto a la realización de una determinada operación o procedimiento. Luego se presentan ejemplos de problemas con sus correspondientes estrategias de solución, y una sección final, con ejercicios propuestos clasificados en diferentes tópicos y niveles de dificultad. Se hace énfasis, a lo largo de las unidades, en la diferencia con relación al concepto mismo y el procedimiento de cálculo requerido para efectuar alguna operación aritmética. Por tanto, el lector, encontrará claramente diferenciadas las definiciones, que en la estructura de la matemática, representan las ideas básicas y contienen los términos técnicos con los cuales se debe hacer referencia a cierto objeto abstracto. Las definiciones están escritas con un lenguaje informal, buscando disminuir la carga semántica, con el propósito de que su comprensión no se vea afectada cuando el lector desconozca ciertos símbolos matemáticos; de otro lado, si el concepto lo amerita, se adicionan figuras en las cuales se presentan esquemas que ayudan a entender la idea central de lo que se busca enseñar. Los procedimientos, son básicamente una serie de pasos algorítmicos o instrucciones que tienen como objetivo la obtención de un determinado resultado. Se formulan las propiedades relacionadas con las distintas operaciones o conceptos, dando a cada propiedad su correspondiente denominación, la cual el lector debe recordar, pues son la fuente para la adquisición, apropiación y uso de un lenguaje técnico, como lo es en cierta forma el de las matemáticas. Cada capítulo cuenta con al menos una sección de ejercicios, cuyo fin primordial es el de practicar la teoría. Hay secciones de ejercicios orientadas a la aplicación algorítmica del procedimiento y el concepto; en otras secciones, en cambio, se incentiva el uso de la imaginación y alternativas no algorítmicas de solución. Estas secciones de ejercicios se pueden usar como una fuente de material para la preparación de pruebas de admisión, ECAES u olimpiadas de matemáticas. Los ejemplos cuentan con la debida explicación y argumentación del porqué de cada paso y se presentan a dos columnas para acentuar los distintos pasos que hay que cumplir según los procedimientos que se han enunciado.

Se busca incluir la mayor cantidad de respuestas a los ejercicios de cada capítulo, como un mecanismo de comprobación sobre el proceso de solución, ya que se comprende la frustración que se siente cuando, al solucionar un problema, el lector no cuenta con la manera de establecer si es correcta o no. La mayoría de los ejercicios del libro, se han generado con una serie de trozos de código, programados en PHP. Estos Snippet de código fueron proyectados para que se enuncie el ejercicio con su correspondiente respuesta, asi que salvo algún error de digitación o tipográfico, las soluciones a los ejercicios corresponden fielmente a lo que se pide en el enunciado. Finalmente, el texto cuenta con un índice analítico de temas, posibilitando el acceso de forma rápida a cierto tipo contenido y, asimismo, brindando una idea de conjunto de las relaciones entre los distintos capítulos.

Gracias o todos los que nos han brindado su apoyo en la elaboración de esta obra, y especialmente a Juan David Alzate, por sus valiosos aportes en el desarrollo de los códigos para generar ejercicios.

1 Operaciones y conceptos básicos

Este capítulo está dedicado al estudio de los fundamentos básicos de la aritmética y resalta los conceptos de operación, propiedades y relaciones entre los números reales. Se intenta que el lenguaje de este texto sea simple y práctico, en función de la adquisición de competencias relacionadas con el dominio de la aritmética, que es considerada la base de las matemáticas aplicadas. Para lograr con este objetivo, los ejemplos proporcionan estrategias generales de solución, destacando pasos que se pueden emplear, de forma sistemática, en la solución de los ejercicios propuestos en la temática ejemplificada.

1.1 Sistema de los números enteros

Definición 1.1 Sistema de los números enteros

El sistema de los números enteros está formado por los números del conjunto

$$\mathbb{Z} = \{\ldots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\ldots\}$$

Vale la pena resaltar que los números enteros pueden ser positivos[1] o negativos. Únicamente el número cero es neutro. Al escribir los números enteros positivos se omite el signo +, los números negativos van precedidos del signo −, y es aquí donde debe tenerse presente que cuando hay un menos que precede un número entero, se puede entender que el número es negativo, pero el signo menos también representa la operación sustracción. La expresión $4-3$ significa que a 4 hay que restarle 3 pero en la expresión $4-(-3)$ se esta restando (-3). Es de vital importancia el uso de los signos de agrupación en expresiones donde aparecen simultáneamente números enteros negativos en operaciones indicadas de adición o sustracción.

Existe una relación entre los puntos de una recta y los números reales[2], a cada punto le corresponde un número real, y a cada número le corresponde un punto. En la Figura 1.1[3] se localizan algunos puntos de la recta y su correspondencia con los números enteros.

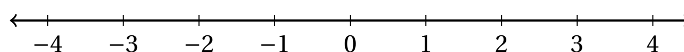


Figura 1.1: Recta real

Ahora se analiza el concepto de valor absoluto, el cual se puede entender como la distancia desde un punto cualquiera de la recta real al origen. La Figura 1.2 muestra dos opciones: cuando el punto corresponde a un número

[1]Los enteros positivos se denominan en algunos textos como naturales e igualmete en algunos teoremas se considera al 0 como natural.
[2]A este tipo de relación se le llama biunívoca o biyección.
[3]Todas las figuras son de elaboración de los autores.

positivo y otra cuando es negativo.

En la Figura 1.2 se aprecian dos ejemplos: en el primero de ellos se determina la distancia que hay desde el punto donde se localiza el -3 y el origen o punto donde está el 0. Es claro que la distancia es de 3 unidades, en razón a que no se puede hablar de valores de distancia negativos. El segundo ejemplo muestra la distancia desde 2 hasta el 0.

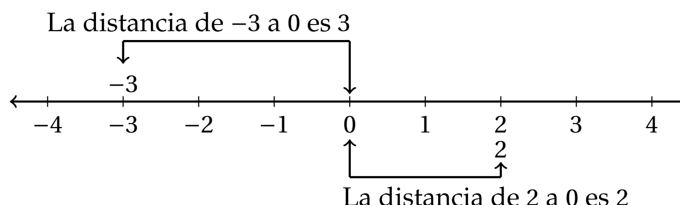


Figura 1.2: Concepto de valor absoluto

Lo anterior permite definir la operación valor absoluto, simbolizada así $|x|$, es decir $|-3| = 3$ y $|2| = 2$, ésta se formaliza en la siguiente definición.

Definición 1.2 Valor absoluto de un número real

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La definición expresa que el valor absoluto de un número es siempre positivo o cero, puesto que una distancia *no* puede ser negativa. Dicho de otra manera, cuando x es positivo o cero $|x|$ es el mismo x sin alterar su signo, y cuando x es negativo $|x|$ le cambia el signo dando como resultado un número positivo, este cambio de signo se representa con $-x$. En el ejemplo anterior, al calcular $|2| = 2$ por ser 2 positivo, ahora al calcular $|-3| = -(-3) = 3$ lo que ocurre es que se cambia el signo, ya que -3 es negativo.

Adición y sustracción de números enteros

La adición de números enteros es una operación definida entre dos enteros que tiene como resultado otro entero.[4] Para calcular la suma de dos números enteros se presentan las siguientes posibilidades en cuanto al signo de los sumandos.

Procedimiento 1.1 Adición de dos números enteros de igual signo
Se suman los valores absolutos de los dos números y se pone el signo que tienen, es decir, si son positivos la suma tiene como signo $+$, si son negativos tendrá signo $-$.

Ejemplo 1.1

Adición de dos números enteros positivos.
$6 + 9 = 15$.

[4] Propiedad clausurativa de la adición, si a y b son enteros ($a, b \in \mathbb{Z}$), entonces $a + b \in \mathbb{Z}$.

Ejemplo 1.2

Adición de dos números enteros negativos.
Para calcular $(-5)+(-4)$ se suman $5+4$, que son los valores absolutos y el resultado tiene signo menos, es decir -9.

Procedimiento 1.2 Adición de dos números enteros de diferente signo
Al número mayor en valor absoluto se le resta el menor en valor absoluto y el resultado tiene el signo del mayor en valor absoluto.

Ejemplo 1.3

Adición de dos números enteros con signo diferente.
Calcular la suma $(-9)+5$. El mayor es 9 y el menor es 5, así que calculamos $9-5=4$, pero el resultado es -4.

Ejemplo 1.4

Adición de dos números enteros con signo diferente.
$8+(-5)$, el mayor es 8 y el menor 5, se calcula $8-5=3$, por tanto el resultado es 3.

En los dos ejemplos anteriores se procede igual si las operaciones fueran $5+(-9)$ y $(-5)+8$, ya que la adición es conmutativa, lo cual se pude enunciar de la siguiente manera.

Propiedad 1.1 La adición de números reales es conmutativa, es decir

$$a+b=b+a$$

Ahora se considera el cálculo de la sustracción de números enteros, en el cual ocasionalmente es necesario usar la ley de los signos, a fin de expresar los cálculos como una adición de enteros.

Propiedad 1.2 Ley de signos

1. El producto de dos números con igual signo es siempre positivo.
2. El producto de dos números con diferente signo es negativo.

Es importante resaltar que la propiedad anterior es válida en el cálculo del signo de la división de dos enteros.
Se ilustra la diferencia de dos números enteros con los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.5

Diferencia de dos enteros negativos.
Para calcular $(-4)-(-9)$ se aplica la ley de signos, con lo cual la operación se transforma a $(-4)+9$, que es la adición de dos números enteros con diferente signo, por tanto se calcula $9-4=5$ y el resultado es 5, ya que el número mayor en valor absoluto es 9.

Ejemplo 1.6

Diferencia de dos enteros positivos.
Para calcular $8-4=4$, es simple, pero si la operación es $5-9$, se calcula $9-5=4$ y el resultado tendrá el signo del número mayor en valor absoluto, es decir -4 ya que el número mayor en valor absoluto es 9.

Ejemplo 1.7

Diferencia de dos enteros con diferente signo.
Para determinar el valor de $(-4)-5$ se puede emplear la ley de signos para expresar la operación como $(-4)+(-5)$, que es una adición de dos números enteros con igual signo; por tanto la operación es $4+5=9$, pero el resultado tiene el signo menos, ya que se sumaron dos cantidades negativas, es decir -9. Ahora si la operación es $7-(-2)$ se debe usar la ley de signos para expresar la operación como $7+2$ que da como resultado 9.

Polinomios aritméticos

Un polinomio aritmético es una expresión que combina las cuatro operaciones básicas. Aritmético hace referencia a que las operaciones involucran únicamente números. Simplificar un polinomio aritmético tiene como finalidad la obtención del resultado de la expresión, al efectuar todas las operaciones indicadas.

Procedimiento 1.3 Simplificar un polinomio aritmético sin signos de agrupación

1. Efectuar productos o divisiones.
2. Se suman todos los números positivos y todos los números negativos, luego, al mayor en valor absoluto se le resta el menor. El resultado tiene como signo el signo del mayor en valor absoluto.

Ejemplo 1.8

Simplificar $5+6-8-6+5$.
Primero se suman $5+6+5=16$.
Luego se suman $8+6=14$.
Finalmente al mayor: 16 se le resta el menor: 14, es decir, $16-14=2$ con lo cual la respuesta es +2.
Se enfatiza en que el signo + corresponde al número mayor 16.

Ejemplo 1.9

Simplificar $10-15+4+8-8-6$.
Primero se suman los positivos: $10+4+8=22$.
Luego se suman los negativos: $15+8+6=29$.
Al mayor 29 se le resta el menor 22, es decir: $29-22=7$.
La respuesta es -7 debido a que el mayor es 29, es decir los negativos.

En ambos ejemplos vale la pena aclarar el por qué se habla de sumar los negativos.
Resulta que la operación $10-15+4+8-8-6$ se puede reescribir como $10+(-15)+4+8+(-8)+(-6)$. Es decir se ha

expresado el polinomio como la suma de 6 números enteros, 3 positivos y 3 negativos.
Al tener varias operaciones indicadas simultáneamente, en los polinomios aritméticos se emplean los signos de agrupación como el paréntesis "( )", el corchete "[ ]" y las llaves "{ }" con el objeto de establecer el orden en que se deben realizar las mismas.

Procedimiento 1.4 Simplificar un polinomio aritmético con signos de agrupación
Se identifican los signos de agrupación más interiores, en los cuales se aplica el procedimiento anterior 1.3.

Ejemplo 1.10

Simplificar $3[(1)(17-24)+(3)[5(20-38)+4(5)]]$

$3[(1)(17-24)+(3)[5(20-38)+4(5)]]$	Ejercicio dado
$3[(1)(-7)+(3)[5(-18)+4(5)]]$	Se efectuan las dos diferencias y el producto
$3[-7+(3)[-90+20]]$	Se efectuan los tres productos
$3[-7+(3)[-70]]$	Se realiza la adición
$3[-7+(-210)]$	Se calcula el producto
$3[-217]$	Se soluciona la adición de los enteros negativos
-651	Resultado, luego de hacer la multiplicación

Para hacer mayor énfasis en el orden en que se desarrollan las operaciones, se resaltan los cálculos usando el sombreado. Observe que en el primer paso se simplifican los dos paréntesis interiores y además, se calcula una multiplicación, con el fin de evidenciar que el procedimiento es una guía de cómo abordar estos cálculos, pero es en últimas la práctica, la que posibilita tomar decisiones en torno a la simplificación de una expresión cualquiera.

Resumen de la sección

1. Adición y sustracción.
2. Valor absoluto.
3. Ley de signos.
4. Simplificación de polinomios aritméticos.

Ejercicio 1.1

Ejercicios sobre polinomios aritméticos

Simplificar las siguientes expresiones:

1. $-5+12-11+6+2+7$
2. $-14-11-12-1$
3. $-12-1-1+5+15-4$
4. $6-12-6+4-5+1+2$
5. $11-21-10-47+18+22$
6. $99-30+51+11-60$

7. $-49+36-25+16-9+2$

8. $12-11+24-22+36-33$

9. $16+25-9+10-9-9+11$

10. $-10-11-12-13$

11. $300-159-41+50-100$

12. $91-7-6-11-78+15$

13. $-45-54+25+52+22-33$

14. $121-53-100+13-24-6$

15. $-2-3-4-5+6+7+8$

16. $-15+45-14+8-11$

17. $-8+[7-(-10)]-(25-13)$

18. $3+\{3+[3+(3+1)]\}-12$

19. $-13-\{[(-16+9)+8]+13\}$

20. $\{-[-20+(-14+19)+5]-1\}$

21. $-\{5-(-4)-1+[-4-11]\}+5$

22. $[15-10+(25-41)]-(20+5)$

23. $[-4+5]-[-3-2]-[10+7-22]+1$

24. $-\{5+4+[-1+(4+8)+1]+3-11\}$

25. $-(5-3)-(3-5)-[14-(29-15)]$

26. $\{3+1[-(6+15)+(5-14)]+(4+5)\}$

27. $\{[-16+(16-27)]-(15+4)-(10-15)\}$

28. $-[-(45-19)-10]-[-(-44+17)-1]+4$

29. $[-2-4-6+(3+5+7)]-[(15+11-23)-9]+1$

30. $(-5+1-4-6)+(25+14-30+(-5+13-5-4))$

31. $[(5-4+15)-(-1-2+3)]+(5-14)-15+(4+7)$

32. $-22+[12+(-49+25-4)-(6+1)]-(-4-5-6)$

33. $[8-(-4)]-[-2-15]-[-12+14]+[-12-1]+(-11)$

34. $-16+[-(-10-14+17)-(12+5-25)]+(-15+6)-4$

35. $\{[4-24-1+7-(-1-2-3)+1]-1+5-(-18+20)\}$

Aplicando los conceptos de operaciones aritméticas, resolver los siguientes problemas:

36. Dentro de 10 años mi nieto Rodrigo tendrá el triple de la edad que tiene ahora. Entonces ahora tiene:

37. Una lata contiene tres latas pequeñas y cada lata pequeña contiene cuatro latas más pequeñas. ¿Cuántas latas hay en total?

38. Una calculadora se echa a perder pues no realiza bien las operaciones de suma, entregando siempre un resultado incorrecto, el que consiste en que en lugar de sumar el último número, lo resta. Según ello, ¿cuál es el resultado *incorrecto* de la siguiente suma $5+4+1$?

39. Si la suma de 3 números impares consecutivos da como resultado 21, entonces el número impar mayor es:

40. Un terreno rectangular de 30 por 60 metros necesita cercarse con una malla de alambre apoyada en postes, que deben ubicarse cada metro y medio. ¿Cuántos postes se necesitarán?

41. ¿Cuántas personas se encuentran en un cuarto, si en él hay 1 gato, 1 gallo y 1 perro y al contar el número de orejas de todos (personas y animales) fueron 26?

42. Tenemos tres cajas separadas de idéntico tamaño y dentro de cada una hay dos cajas separadas pequeñas, y dentro cada una de las cajas pequeñas hay cuatro cajitas aún más pequeñas. ¿Cuántas cajas tenemos en total?

43. Sofía, Isabel, Federico y Vicente cenan en un restaurante. Llega la cuenta, que para todo el grupo es de \$90. Para simplificar, deciden dividir la cuenta en 4 partes iguales.¿Cuánto tendrá que pagar cada uno, sabiendo que Federico ofrece una botella de vino (\$16), y que por otro lado, deciden dejar \$2 de propina?

44. Si 4 fichas blancas se cambian por una azul, 3 azules se cambian por una verde y 4 verdes por una roja. Con 144 fichas blancas, ¿para cuántas verdes alcanzan?

45. Se lanzan 3 dados y se observa que las caras superiores suman 13. Las caras que están contra el piso suman:

Evaluar las expresiones con los valores indicados y luego simplificar.

46. $6[(7m-m)+1-5n]\div 3(m+n)$, Si $m=5$, $n=2$.

47. $(bc - ab + cc - aa) \div (c - a)$, Si $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$.

48. $[(x + y)(x + y) + x + y - 6] \div (x + y + 3)$, Si $x = 18$, $y = 12$.

49. $[(2a - 3b) \div 2c] + \{[8(a - b) \div c] - bc\}$, Si $a = 6$, $b = 4$, $c = 2$.

50. $\{xyz - [2x + y(z + y) \div w]\} \div 2w$, Si $x = 6$, $y = z = 4$, $w = 2$.

1.2 Criterios de divisibilidad

Para presentar los criterios de divisibilidad, en primer lugar, se definen dos conceptos básicos como son el de número primo y compuesto, entre otras ideas.

Definición 1.3 Número primo

Se puede definir de dos maneras

1. Un número es primo si y sólo si tiene exactamente dos divisores.
2. Un número es primo si y sólo si sus únicos divisores son el mismo número y la unidad.

La siguiente sucesión lista algunos números primos.

$$p = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101...\}$$

Definición 1.4 Número compuesto

Se puede definir de dos maneras

1. Un número es compuesto si tiene tres o más divisores.
2. Un número es compuesto si además de ser divisible entre sí mismo y la unidad tiene otro divisor.

Todos los números pares, excepto el 2, son números compuestos, ya que tienen al 2 como divisor; por ejemplo el 20 tiene por divisores $\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$ y, según la definición, anterior es un número compuesto.

Definición 1.5 Factor o divisor de un número

Un número a es factor o divisor de un número b si y solamente si b dividido a tiene como residuo 0.

Si consideramos nuevamente el número 20, podemos ver que el 10 es un factor o divisor ya que la división del 20 entre 10 es exacta, es decir con residuo 0.

Definición 1.6 Número par e impar

1. Todo número par es múltiplo de 2, es decir, si a es par se cumple que 2 es un divisor o factor de a.
2. Todo número que NO es par, es impar.

La definición anterior se puede expresar de manera simbólica escribiendo que $2n$ y $2n + 1$ con $n \in \mathbb{Z}$, representan números pares e impares, respectivamente.

Los criterios de divisibilidad son reglas que se aplican a un número dado para determinar si es un número compuesto.

Los criterios listados en la definición 1.7, son algunos de los más usados, pero en ocaciones se encuentran ejercicios en los que haya que emplear la divisibilidad por números mayores que el 11.

Definición 1.7 Criterios de divisibilidad

1. Divisibilidad entre 2.
   Un número es divisible entre 2 cuando termina en cifra par.
2. Divisibilidad entre 3.
   Un número es divisible entre 3 cuando la suma de los valores absolutos de sus cifras es múltiplo de 3.
3. Divisibilidad entre 5.
   Un número es divisible entre 5 cuando su última cifra es 0 ó 5.
4. Divisibilidad entre 7.
   Un número es divisible entre 7 cuando separando la primera cifra de la derecha, multiplicándola por 2, restando este producto de lo que queda a la izquierda y así sucesivamente, da cero o múltiplo de 7.
5. Divisibilidad entre 11.
   Un número es divisible entre 11 cuando la diferencia entre la suma de los valores absolutos de sus cifras de lugar impar y la suma de los valores absolutos de sus cifras de lugar par, de derecha a izquierda, es cero o múltiplo de 11.

Existen criterios de divisibilidad por números primos y compuestos; por ejemplo, un números es divisible por 6, cuando es divisible por 2 y por 3. Sin embargo, la finalidad al emplear criterios de divisibilidad es la de expresar un número como producto de sus factores primos, lo que se resume en la siguiente definición.

Definición 1.8 Factorización

Cuando se expresa un número como producto de sus factores primos, se dice que el número está factorizado.

Ejemplo 1.11

La factorización del número 20 es $(2)(2)(5)$

Factorizar o descomponer un número en sus factores primos es un proceso en el que se deben aplicar los criterios de divisibilidad de la definición 1.7, lo cual requiere de práctica y manejo de estos. En el siguiente ejemplo se presenta un esquema que ayuda a comprender cómo realizar este procedimiento.

Ejemplo 1.12

Descomponer en factores primos 420

420	2	El 420 es par, así que se puede dividir por 2, es decir $420 \div 2 = 210$
210	2	El 210 es par, así que se puede dividir por 2, es decir $210 \div 2 = 105$
105	3	El 105 es divisible por 3 ya que al sumar sus cifras $1+0+5=6$, que cumple con el criterio dado en la definición 1.7, se puede dividir por 3, es decir $105 \div 3 = 35$
35	5	El 35 termina en 5, así que se puede dividir por 5, es decir $35 \div 5 = 7$
7	7	El 7 es divisible por 7, así que se puede dividir por 7, es decir $7 \div 7 = 1$
1		Siempre la descomposición termina cuando se llega a 1

Por tanto, 420 se puede expresar como $(2)(2)(3)(5)(7)$

En la descomposición de un número en sus factores primos se aplican los criterios de divisibilidad enunciados en la definición 1.7. La descomposición en factores primos es única y no depende del orden en que se apliquen los

criterios, pero es conveniente aplicarlos en orden a fin de ir agotando cada uno de ellos, aunque si el lector gusta aplicarlos en cualquier orden, lo puede hacer y la respuesta será la misma.

Ejemplo 1.13

Descomponer en factores primos 17787

17787	3	Como se cumple que $1+7+7+8+7=30$, entonces 17787 es divisible por 3
5929	7	Se cumple que $592-(9)(2)$ es 574, que es múltiplo de 7, por tanto 5929 es divisible por 7
847	7	Nuevamente se cumple que $84-(7)(2)$ da 70, así que dividimos por 7
121	11	las cifras de lugar impar suman 2, la de lugar par es 2, así que $2-2=0$, por lo que es div. por 11
11	11	11 es primo, así que se divide por 11
1		

Por tanto, la descomposición de 17787 es $(3)(7)(7)(11)(11)$

Con el objeto de analizar con más detenimiento los criterios de divisibilidad por 7 y 11, se verá cómo se aplican al número 17787. El criterio de divisibilidad por 7 expresa que se debe restar dos veces el número del extremo derecho de las demás cifras, y el valor obtenido debe ser 7 o 0, así que el cálculo es $1778-14=1764$. Como el número obtenido no se sabe si es múltiplo de 7, entonces aplicamos de nuevo el criterio tantas veces como sea necesario a los sucesivos resultados, por lo tanto $176-8=168$ y finalmente $16-16=0$. Se insite en que se ha aplicado el criterio tres veces, hasta obtener un número del cual se tenga certeza que es divisible por 7 o que se obtenga 0.

Como 17787 también es divisible por 11, entonces debe cumplir con dicho criterio. De izquierda a derecha se enumeran las cifras para luego sumar las de posición par e impar. La suma de las cifras de lugar impar es $7+7+1=15$, las de lugar par es $8+7=15$, ahora la diferencia es $15-15$ igual a 0; por tanto se cumple con el criterio de divisibilidad por 11.

Resumen de la sección

1. Número primo o compuesto.
2. Factor o divisor de un número.
3. Criterios de divisibilidad.
4. Factorización o descomposición en factores primos

Ejercicio 1.2

Ejercicios sobre factorización de números enteros

Descomponer en factores primos cada uno de los siguientes números.

1. 16
2. 100
3. 27
4. 25
5. 343
6. 98
7. 375
8. 216
9. 64
10. 81
11. 132
12. 625
13. 2700
14. 1430
15. 729
16. 49
17. 512
18. 315
19. 210
20. 225

21. 8575	24. 1260	27. 3575	30. 42875
22. 2940	25. 1485	28. 6300	31. 16224
23. 21175	26. 1331	29. 15147	32. 67500

En las secciones anteriores se han establecido conceptos previos básicos y fundamentales que serán la base de los procedimientos y aplicaciones que continúan en el texto. Las dos primeras aplicaciones que se presentan son las de máximo común divisor y mínimo común múltiplo.

1.3 Máximo común divisor

Las palabras máximo, común y divisor (MCD en lo sucesivo) tienen todas sentido en el concepto que definen, veamos la razón.
Dados los números 20 y 30, ¿cuál será su MCD?. Se consideran inicialmente los divisores de los números dados.
Los divisores de 20 son $\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$ y los de 30 son $\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$
Nótese que los números $\{1, 2, 5, 10\}$ son comunes, y el número 10 es el máximo de ellos, por tanto el $\text{MCD}[20, 30] = 10$.

Definición 1.9 Máximo común divisor || MCD
El máximo común divisor de dos o más números es el mayor número que los divide a todos exactamente.

Si bien es clara la idea de qué es el MCD, se requiere de un proceso para calcularlo. Existen tres métodos para el cálculo del MCD: por descomposición en factores primos, mediante el algoritmo de Euclides y usando el mínimo común múltiplo. En este texto se explica su cálculo mediante la descomposición en factores primos en razón a que es un proceso que se usará eventualmente en álgebra y, por tanto, vale la pena practicarlo desde ahora.

Procedimiento 1.5 Cálculo del MCD
El MCD de varios números expresados en sus factores primos, es el producto de los factores primos comunes afectados de su menor exponente.

Ejemplo 1.14

Calcular el MCD de 20 y 30.
Se descomponen los números dados en sus factores primos.

$$\begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Se obtiene que $20 = (2^2)(5)$ y $30 = (2)(3)(5)$. Se puede ver que los factores comunes son 2 y 5 con su menor exponente que es 1, por tanto el MCD es $(2)(5) = 10$

Hay otro esquema con el cual se calcula el MCD, que se presenta en el siguiente ejemplo en el cual se usa el ejercicio anterior para que el lector pueda ver la semejanza entre ambos esquemas.

Ejemplo 1.15

Calcular el MCD de 20 y 30.
Se descomponen los números de forma simultanea, determinando los divisores comunes de ambos.

20	30	2
10	15	5
2	3	

En la columna de la derecha se escriben los divisores que son comunes a ambos números. Note que sólo se determinan los divisores comunes, no todos los divisores que tengan los números dados.

Resumen de la sección

1. Máximo común divisor, MCD.
2. Procedimiento de cómo calcular el MCD de dos o más números.

Ejercicio 1.3

Ejercicios sobre máximo común divisor || MCD

Calcular el MCD de los grupos de números dados.

1. 60 y 80
2. 24 y 48
3. 75 y 105
4. 44 y 92
5. 221 y 210
6. 24 y 32
7. 180 y 225
8. 110 y 50
9. 200 y 160
10. 33 y 111
11. 66, 99 y 33
12. 100, 225 y 275
13. 102, 180 y 625
14. 63, 9 y 108
15. 660, 105 y 300
16. 432, 222 y 246
17. 132, 330 y 480
18. 400, 180 y 360
19. 336, 144 y 240
20. 120, 126 y 130
21. 120, 176, 256 y 224
22. 75, 105, 165 y 195
23. 78, 130, 273 y 231
24. 100, 324, 225 y 1296
25. 112, 175, 252 y 343
26. 60, 84, 108 y 132
27. 110, 132, 154 y 176
28. 90, 150, 210 y 270
29. 144, 400, 350 y 225
30. 216, 264, 168 y 192

1.4 Mínimo común múltiplo.

Definición 1.10 Mínimo común múltiplo || MCM

El mínimo común múltiplo de dos o más números es el menor número que es divisible por cada uno de ellos.

Obsérvese que de forma análoga al concepto de MCD tratado en la definición 1.10, las palabras con las que se denomina este concepto proporcionan una idea de lo que éste representa; es decir, suponga que se desea calcular el MCM de los números 6 y 8, entonces lo primero es hacer una lista con los múltiplos de los números dados.

Los múltiplos de 6 son $\{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, ...\}$

Los múltiplos de 8 son $\{8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, ...\}$

Ahora se hace la lista de múltiplos comunes de 6 y 8 que son $\{24, 48, 72, 96, 120, 144, ...\}$

Por lo tanto, se puede razonar que la expresión mínimo común múltiplo hace referencia al más pequeño de los múltiplos comunes de los números dados, es decir 24 y el siguiente procedimiento describe la forma como se calcula.

Procedimiento 1.6 Cálculo del MCM
El MCM de varios números, expresados en sus factores primos, es el producto de los factores primos comunes y no comunes afectados de su mayor exponente.

El procedimiento anterior permite realizar el cálculo de forma simplificada, sin la necesidad de calcular la lista de múltiplos de los números dados, como se realizó para los números 6 y 8. Para ilustrar este procedimiento se realiza el cálculo del MCM de estos números en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.16

Calcular el MCM de 6 y 8.
Se deben expresar los números en factores primos, $6 = (2)(3)$ y $8 = 2^3$; aplicando el procedimiento anterior se observa que los factores son 2 (común) y 3 (No común), con lo cual el MCM es $(2^3)(3) = (8)(3) = 24$ que es el mismo resultado que se obtuvo con anterioridad.

Ejemplo 1.17

Calcular el MCM de 6, 8 y 10.
Los números dados, expresados en factores primos son: $6 = (2)(3)$, $8 = 2^3$ y $10 = (2)(5)$; los factores son 2, 3 y 5 y su MCM es $(2^3)(3)(5) = (8)(15) = 120$.

A la hora de calcular el MCM de varios números es conveniente contar con un esquema de cálculo eficaz. Los ejemplos que siguen presentan esquemas que posibilitan el cálculo del MCM.

Ejemplo 1.18

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 56 & 2 \\ 28 & 2 \\ 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$60 = (2^2)(3)(5)$ $\quad 90 = (2)(3^2)(5)$ $\quad 56 = (2^3)(7)$
Luego de establecer la descomposición en factores primos de los números dados, se usa la definición para determinar que el MCM $(60, 90, 56) = (2^3)(3^2)(5)(7) = 2520$.

El ejemplo anterior presenta un esquema formado por tres pasos: el primero es descomponer cada uno de los números, luego se expresa cada número como producto de sus factores primos, y por último, se aplica la definición de MCM.

Ejemplo 1.19

Calcular el MCM de los números 24, 45 y 50

24	45	50	2
12	45	25	2
6	45	25	2
3	45	25	3
1	15	25	3
	5	25	5
	1	5	5
		1	

El esquema muestra el cálculo de todos los divisores comunes y no comunes de los números dados; el MCM es el producto de todos los divisores obtenidos en la cuarta columna, ello se sintetiza así: $(2^3)(3^2)(5^2) = 1800$.

Este segundo esquema consta de dos pasos, a diferencia del esquema ejemplificado en 1.17(ejemplo anterior); aquí se descomponen todos los números de forma simultánea, comenzando de forma ordenada a calcular divisibilidad por 2, por 3 y finalmente por 5; el orden en que se apliquen los criterios no determina el resultado, pero su finalidad consiste en ir agotando la divisibilidad por cada número.

Resumen de la sección

1. Mínimo común múltiplo, MCM.
2. Procedimiento de cómo calcular el MCM de dos o más números.

Ejercicio 1.4

Ejercicios sobre mínimo común múltiplo | | MCM

Calcular el MCM de los grupos de números dados.

1. 8 y 20
2. 14 y 21
3. 6 y 16
4. 9 y 12
5. 15 y 25
6. 8 y 11
7. 40 y 100
8. 60 y 105
9. 10 y 25
10. 30 y 42
11. 6, 14 y 18
12. 7, 15 y 35
13. 9, 24 y 30
14. 12, 20 y 30
15. 42, 84 y 126
16. 30, 50 y 75
17. 60, 80 y 120
18. 60, 90 y 150
19. 5, 7 y 9
20. 40, 45 y 50
21. 2, 3, 5 y 7
22. 63, 105, 135 y 135
23. 30, 42, 70 y 105
24. 36, 45, 60 y 90
25. 28, 70, 100 y 175
26. 55, 88, 120 y 165
27. 5, 7, 9 y 11
28. 110, 140, 154 y 385
29. 77, 220, 308 y 770
30. 60, 72, 120 y 180

Resolver los siguientes problemas

31. En una pista circular de atletismo, 3 corredores entrenan. Si el primero de ellos debe dar 200 pasos para recorrer toda la pista, el segundo corredor da 2 pasos por cada uno que da el primero y el tercero da 3 pasos por cada 2 que da el segundo. Si parten los 3 desde la meta, ¿cuántos pasos deberá dar el tercer corredor para que se encuentren los tres corredores en la meta nuevamente?

32. La posición más próxima al sol de dos cometas se repite en el primero de ellos cada 100 años y en el segundo cada 75. Si han pasado ambos por su posición más próxima al sol el año 2000, ¿En qué año volverán a encontrarse de igual modo?

33. Con un grupo de fósforos puedo formar montones de 7, 8 y 9 fósforos sin que sobre alguno. cuál es el número de fósforos que tengo.

1.5 Sistema de los números racionales.

Esta sección está dedicada la estudio del sistema de los números racionales, los cuales se definen de la siguiente forma.

Definición 1.11 Sistema de los números racionales

El sistema de los números racionales está formado por los números del conjunto

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \right\}$$

donde p y q son números enteros y q es diferente de 0.

La restricción para q es que no puede ser 0, sin embargo q puede tomar cualquier valor entero, incluido el 1. El hecho de que $q = 1$ implica que el número racional $\frac{3}{1} = 3$ sea a la vez entero y racional, lo cual significa que todo número entero es racional.

Vocabulario 1.1 Clasificación de las fracciones

1. Fracción mixta: suma abreviada de un entero y una fracción propia.
2. Fracción impropia: fracción cuyo numerador es mayor que su denominador.
3. Fracción propia: fracción cuyo numerador es menor que su denominador.
4. Fracción irreducible: fracción en la que numerador y denominador son primos relativos[5]y, por tanto, no puede ser simplificada.
5. Fracción reducible: fracción en la que numerador y denominador NO son primos relativos y por tanto, sí puede ser simplificada.
6. Fracción recíproca: fracción obtenida a partir de otra dada, en la que se han invertido el numerador con el denominador.
7. Fracción entera: fracción en la que el denominador es 1, es decir que representa un número entero.
8. Fracción decimal: fracción cuyo denominador es una potencia de 10.
9. Fracción compuesta: fracción cuyo numerador y/o denominador contienen a su vez fracciones.
10. Fracciones equivalentes: las que representan la misma cantidad.
11. Fracciones homogéneas: fracciones que tienen el mismo denominador.
12. Fracciones heterogéneas: fracciones que tienen diferente denominador.

[5]Dos números a y b son primos relativos, cuando el MCD de ellos es 1 o equivalentemente son números que no tienen factores en común, excepto el 1

Ejemplo 1.20 –Clasificación de las fracciones

1. Fracción mixta: $1\frac{2}{3}$ que se lee "uno y dos tercios"
2. Fracción impropia: $\frac{3}{2}$
3. Fracción propia: $\frac{2}{3}$
4. Fracción irreducible: $\frac{7}{5}$, los números 7 y 5 no tiene un factor común
5. Fracción reducible: $\frac{10}{4}$, note que 10 y 4 tienen como MCM 2
6. Fracción recíproca[6]: dada la fracción $\frac{5}{4}$ su recíproca es $\frac{4}{5}$
7. Fracción entera: $\frac{15}{1} = 15$
8. Fracción decimal: $\frac{3}{10}$ ó $\frac{7}{1000}$
9. Fracción compuesta: $\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{7}}$
10. Fracciones equivalentes: $\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$
11. Fracciones homogéneas: $\frac{5}{8}$ y $\frac{-31}{8}$ son homogéneas
12. Fracciones heterogéneas: $\frac{-47}{3}$ y $\frac{59}{10}$ son heterogéneas

De la clasificación anterior, es importante resaltar que hay infinitos números racionales que son equivalentes; es así como los números $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$ representan la misma cantidad. Para ilustrar esta idea se recurre a la representación gráfica de cada uno de los números.

Propiedad 1.3 Dos fracciones son equivalentes[7] si

$$\frac{a}{b} \equiv \frac{c}{d} \Longleftrightarrow (a)(d) = (c)(d)$$

Simplificar una fracción consiste es expresarla como una fracción equivalente irreducible, en el ejemplo 1.21 se explica este cálculo.

Ejemplo 1.21 –Simplificación de fracciones

Simplificar la fracción

$\frac{20}{8}$	Fracción dada
$\Rightarrow \frac{(\cancel{2^2})(5)}{\cancel{2^3}}$	Se descomponen en factores primos el numerador y el denominador (ver divisibilidad 1.7).
$\Rightarrow \frac{5}{2}$	Se obtiene esta fracción luego de simplificar los factores comunes.

Es claro que $\frac{20}{8} \equiv \frac{5}{2}$, es decir son fracciones equivalentes.

[6] El producto de una fracción con su recíproca es 1, además se representa el recíproco de $\frac{5}{4}$ como $\left(\frac{5}{4}\right)^{-1}$

[7] El símbolo para representar equivalencia es "≡", pero se suele usar el "=".

Ejemplo 1.22 –Amplificación de fracciones

Obtener una fracción equivalente a $\frac{-3}{7}$.
En el ejemplo 1.21 se obtubo una fracción equivalente a partir de la simplificación de factores comunes, ahora, debido a que -3 y 7 son primos relativos, es decir no tienen factores comunes. Para obtener una fracción equivalente se procede de forma inversa al ejemplo 1.21, multiplicando por una cantidad entera el numerador y el denominador.

$\frac{-3}{7}$	Fracción dada
$\Rightarrow \frac{(-3)(4)}{(7)(4)}$	Multiplicamos por un entero, en este caso 4.
$\Rightarrow \frac{-12}{28}$	Se obtiene esta fracción luego de efectuar las multiplicaciones indicadas.

Según los ejemplos 1.21 y 1.22 se puede concluir que de una fracción cualquiera se pueden obtener fracciones equivalentes, bien sea por simplificación o amplificación. Ambos procesos son empleados con frecuencia en las operaciones entre racionales.

Ejemplo 1.23 –Reducción de fracciones a fracciones homogéneas

Expresar las fracciones $\frac{-5}{3}$ y $\frac{11}{4}$ como fracciones homogéneas.
Para ello debemos obtener fracciones equivalentes cuyo denominador sea el MCM de 3 y 4, por tanto las nuevas fracciones tendrán denominador 12.

$\frac{-5}{3}$ y $\frac{11}{4}$	Fracciones dadas
$\Rightarrow \frac{(-5)(4)}{(3)(4)}$ y $\frac{(11)(3)}{(4)(3)}$	Amplificamos las fracciones multiplicando la primera por 4 y la segunda 3.
$\Rightarrow \frac{-20}{12}$ y $\frac{33}{12}$	Se obtienen estas fracciones, homogéneas, luego de efectuar las multiplicaciones indicadas.

Resumen de la sección

1. Concepto de número racional.
2. Clasificación de las fracciones.
3. Simplificación y amplificación de fracciones.

Ejercicio 1.5

Ejercicios sobre fracciones equivalentes

Simplificar las siguientes fracciones

1. $-\frac{21}{14}$
2. $\frac{8}{24}$
3. $\frac{10}{22}$
4. $\frac{28}{48}$
5. $-\frac{54}{15}$
6. $\frac{21}{63}$
7. $-\frac{45}{25}$
8. $\frac{15}{30}$
9. $\frac{40}{16}$
10. $\frac{210}{90}$
11. $-\frac{60}{80}$
12. $\frac{99}{126}$

13. $\frac{75}{240}$

14. $\frac{192}{224}$

15. $\frac{294}{420}$

16. $\frac{315}{294}$

17. $-\frac{264}{550}$

18. $\frac{945}{1140}$

19. $-\frac{612}{714}$

20. $\frac{825}{555}$

Escribir cada grupo de fracciones dadas como fracciones equivalentes entre sí.

21. $\frac{1}{5}$ y $\frac{2}{3}$

22. $\frac{-3}{2}$ y $\frac{11}{4}$

23. $\frac{15}{2}$ y $\frac{7}{3}$

24. $\frac{-5}{6}$ y $\frac{-1}{10}$

25. $\frac{3}{16}$ y $\frac{7}{6}$

26. $\frac{4}{7}$ y $\frac{7}{4}$

27. $\frac{8}{9}$ y $\frac{7}{6}$

28. $\frac{10}{21}$ y $\frac{-8}{14}$

29. $\frac{11}{10}$ y $\frac{-12}{15}$

30. $\frac{13}{24}$ y $\frac{7}{15}$

31. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ y $\frac{-1}{5}$

32. $\frac{2}{10}, \frac{8}{15}$ y $\frac{3}{6}$

33. $\frac{5}{7}, \frac{14}{9}$ y $\frac{16}{21}$

34. $\frac{100}{49}, \frac{-1}{14}$ y $\frac{11}{10}$

35. $\frac{-5}{11}, \frac{11}{5}$ y $\frac{11}{4}$

36. $\frac{3}{16}, \frac{2}{9}$ y $\frac{5}{36}$

37. $\frac{-1}{15}, \frac{-1}{20}$ y $\frac{-1}{12}$

38. $\frac{2}{11}, \frac{3}{5}$ y $\frac{5}{3}$

39. $\frac{4}{21}, \frac{7}{42}$ y $\frac{-11}{6}$

40. $\frac{11}{12}, \frac{-10}{9}$ y $\frac{5}{8}$

1.6 Adición y sustracción de racionales

Procedimiento 1.7 Adición y sustracción de racionales

Para calcular la suma o la diferencia entre dos o más números racionales, se procede así:

1. Determinar el MCM de los denominadores, que será en denominador común de las fracciones dadas.
2. Dividir el MCM entre cada denominador.
3. El numerador está compuesto por los productos de cada numerador por el cociente del MCM entre cada denominador.
4. Efectuar las operaciones indicadas en el numerador.
5. Simplificar la fracción si es posible.

La adición y/o sustracción de racionales consiste en reducir todas las fracciones a fracciones homogéneas tal y como se hace en el ejemplo 1.23; existen otras técnicas para efectuar estas operaciones, que aparentemente son más simples, pero con miras hacia el álgebra, resulta muy conveniente interiorizar el procedimiento 1.7 que es de carácter general tanto en la aritmética como en el álgebra.

Ejemplo 1.24

Simplificar $\frac{1}{9}+\frac{1}{15}-\frac{1}{6}+\frac{1}{30}$

$\frac{1}{9}+\frac{1}{15}-\frac{1}{6}+\frac{1}{30}$	Ejercicio dado
$\text{MCM}\{9,15,6,30\}=90$	Se determina el MCM de los denominadores
$\frac{90}{9}=10;\ \frac{90}{15}=6;\ \frac{90}{6}=15;\ \frac{90}{30}=3$	Dividir el MCM entre cada denominador
$\dfrac{(1)\cdot 10+(1)\cdot 6-(1)\cdot 15+(1)\cdot 3}{90}$	Se determina la fracción equivalente a las fracciones dadas
$\dfrac{4}{90}$	Se efectúan las operaciones en el numerador
$\dfrac{2}{45}$	Respuesta, después de simplificar la fracción

En el numerador quedaron las operaciones indicadas $(1)\cdot 10+(1)\cdot 6-(1)\cdot 15+(1)\cdot 3$, recuerde que primero se realizan los productos y luego las adiciones y sustracciones, como se ha indicado con anterioridad.

Ejemplo 1.25

Determinar el valor de $6+5\frac{1}{3}-4\frac{1}{6}-1\frac{1}{2}$

$6+5\frac{1}{3}-4\frac{1}{6}-1\frac{1}{2}$	Ejercicio dado
$6+5+\frac{1}{3}-\left(4+\frac{1}{6}\right)-\left(1+\frac{1}{2}\right)$	Un número mixto es la suma de un entero con un racional, así que $5\frac{1}{3}=5+\frac{1}{3}$
$6+5+\frac{1}{3}-4-\frac{1}{6}-1-\frac{1}{2}$	Se suprimen los paréntesis
$6+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{2}$	Se opera con los enteros, antes que operar con los racionales
$\text{MCM}\{1,2,3,6\}=6$	Se determina el MCM de los denominadores
$\frac{6}{1}=6;\ \frac{6}{3}=2;\ \frac{6}{6}=1;\ \frac{6}{2}=3$	Se opera el MCM entre cada denominador
$\dfrac{6\cdot 6+1\cdot 2-1\cdot 1-1\cdot 3}{6}$	Se simplifica a una fracción equivalente, por el método del MCM
$\dfrac{34}{6}=\dfrac{17}{3}$	Se opera, primero el numerador y luego se simplifica la fracción

Notese que el mecanismo usado en el segundo paso de la solución, consiste en aplicar el concepto de número mixto y, en el siguiente paso, se usa el hecho de que si se resta $4\frac{1}{6}$, esto es equivalente a restar 4 y restar $\frac{1}{6}$. A este proceso se le conoce como suprimir los paréntesis. Cuando se suprimen paréntesis se aplica la ley distributiva, además, la ley de signos.

Resumen de la sección

1. Adición y sustracción de racionales

Ejercicio 1.6

Ejercicios sobre adición y/o sustracción de racionales

Combinar usando el procedimiento 1.7

1. $\frac{4}{9} - \frac{26}{45}$
2. $\frac{-8}{3} + \frac{19}{45}$
3. $\frac{4}{27} + \frac{8}{81}$
4. $\frac{26}{15} + \frac{11}{15}$
5. $\frac{19}{3} + \frac{19}{27}$
6. $\frac{8}{15} + \frac{26}{25}$
7. $\frac{4}{27} + \frac{1}{45}$
8. $\frac{-8}{9} - \frac{11}{15}$
9. $\frac{1}{27} + \frac{31}{18}$
10. $\frac{13}{5} + \frac{2}{25}$
11. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{-1}{5}$
12. $\frac{2}{10} - \frac{8}{15} - \frac{3}{6}$
13. $\frac{5}{7} + \frac{14}{9} + \frac{16}{21}$
14. $\frac{10}{9} + \frac{-1}{14} + \frac{11}{6}$
15. $\frac{-1}{11} - \frac{1}{4} + \frac{7}{2}$
16. $\frac{3}{16} - \frac{2}{9} - \frac{5}{36}$
17. $\frac{-1}{15} + \frac{-1}{20} + \frac{-1}{12}$
18. $\frac{2}{11} + \frac{3}{5} + \frac{5}{3}$
19. $\frac{4}{21} + \frac{7}{42} + \frac{-11}{6}$
20. $\frac{11}{12} - \frac{10}{9} + \frac{5}{8}$

Resolver los siguientes problemas

21. Al sumar 4/3 y 15/18, y simplificar el resultado obtenido, el número tiene como denominador:

22. Se reparte cierta cantidad de dinero entre 3 personas, de manera que una reciba 2/5 del total, la otra 1/2 y la tercera $800. ¿A cuánto ascendería la suma repartida?

23. Dos personas A y B se encuentran separadas en un camino recto por 160 m. Si A y B se detienen cuando han caminado los 2/5 y 1/5, respectivamente, ¿a qué distancia se encuentran A y B, entre ellos, si partieron del mismo punto?

24. Dados los siguientes números racionales, 3/5 y 7/9, ordenados de menor a mayor, ¿cuál de los siguientes racionales puede intercalarse entre ellos? 26/45, 3/2, 4/5, 2/3

25. Se tiene en un número primo de 3 cifras, tal que la suma de ellas es 11. Si la cifra de las decenas es 1, ¿cuál es el número si es menor que 500 y la cifra de las unidades es primo?

26. Ana ha pescado la cuarta parte de los peces que ha pescado Rubén. Si este le diera 45 peces a Ana, ambos quedarían con el mismo número de peces. ¿Cuántos peces pescó Ana?

27. En un apartamento se tiene un tanque de agua totalmente lleno. En un día se consumió medio tanque de agua; al día siguiente, la cuarta parte de lo que quedaba; el tercer día se consumieron 15 litros de agua, es decir, la tercera parte de lo que quedaba. ¿Cuál es la capacidad del tanque de agua?

28. La mitad de $5P$ es $3U$ ¿cuál es la tercera parte de $10P$?

29. Los tres quintos de los estudiantes de una clase son mujeres. Si se añadieran a esa clase 5 mujeres y 5 hombres, ¿Cuál afirmación es verdadera?
1) Hay más hombres que mujeres
2) Hay igual número de hombres que de mujeres
3) Hay más mujeres que hombres
4) Con la información dada no se puede determinar si hay más hombres que mujeres

1.7 Multiplicación y división de racionales

Procedimiento 1.8 Multiplicación de racionales

Para calcular el producto de dos números racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ se multiplican sus numeradores y denominadores entre sí, es decir $\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{(a)(c)}{(b)(d)}$.

Ejemplo 1.26

Efectuar $\frac{6}{11} \cdot \frac{121}{18}$

$\frac{6}{11} \cdot \frac{121}{18}$	Ejercicio dado
$\frac{6 \cdot 121}{11 \cdot 18}$	Se multiplican las fracciones
$\frac{726}{198}$	Se efectúan los productos indicados
$\frac{11}{3}$	Se simplifica dividiendo por 66 el numerador y denominador

El ejemplo ilustra la manera como se multiplican dos fracciones, sin embargo hay otro mecanismo más eficiente. Se multiplican las fracciones para obtener $\frac{6 \cdot 121}{11 \cdot 18}$, ahora en vez de efectuar los productos, se simplifica la fracción de la siguiente forma $\frac{\not{6} \cdot \not{121}}{\not{11} \cdot \not{18}} = \frac{11}{3}$. Así, se ha simplificado por 6 y por 11, que es equivalente a simplificar por 66, como en el procedimiento anterior, pero mucho más obvio.

Vocabulario 1.2 Notación de división de racionales

La división entre los números racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, se simboliza de las siguientes formas.

1. $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$
2. $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$

Según la forma como se presente esta operación, se puede esquematizar el procedimiento, la lista muestra las opciones posibles para efectuar una división.

Procedimiento 1.9 División de racionales

1. La división de las fracciones $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ da como resultado una fracción cuyo numerador es el producto de las cifras extremas y con denominador el producto de los medios, así $\frac{(a)(c)}{(b)(d)}$.
2. Para efectuar $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$ se aplica que dividir por $\frac{c}{d}$ es equivalente a multiplicar por $\frac{d}{c}$ y entonces se puede aplicar el procedimiento 1.8, es decir:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{d}{c}\right) = \frac{(a)(d)}{(b)(c)}$$

Ejemplo 1.27

Simplificar $\frac{5}{6} \div \frac{3}{4}$

$\frac{5}{6} \div \frac{3}{4}$	Ejercicio dado
$\frac{5}{6} \cdot \frac{4}{3}$	Forma equivalente de la división de racionales
$\frac{5 \cdot \cancel{4}}{\cancel{6} \cdot 3}$	Se efectúa la multiplicación de racionales
$\frac{5 \cdot 2}{3 \cdot 3} = \frac{10}{9}$	Se simplifican factores comunes y se opera

Para simplificar una fracción compleja como la del ejemplo siguiente, se debe emplear una buena estrategia de solución para evitar los errores derivados de una escritura confusa y poco coherente. Se han identificado dos bloques de operaciones, en el numerador y denominador, las cuales se van a calcular de forma separada.

Ejemplo 1.28

Evaluar $\frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{5} + \frac{1}{4}}{\frac{9}{4} - \frac{9}{20}}$

$\frac{\boxed{\frac{1}{2} + \frac{3}{5} + \frac{1}{4}}}{\boxed{\frac{9}{4} - \frac{9}{20}}}$	Ejercicio dado
$\frac{1}{2} + \frac{3}{5} + \frac{1}{4} = \frac{27}{20}$	Se simplifica a una fracción el numerador
$\frac{9}{4} - \frac{9}{20} = \frac{9}{5}$	Se simplifica a una fracción el denominador
$\frac{\frac{27}{20}}{\frac{9}{5}}$	Se remplazan numerador y denominador con sus correspondientes valores
$\frac{\cancel{27} \cdot \cancel{5}}{\cancel{9} \cdot \cancel{20}} = \frac{3}{4}$	Se efectúa la división de los racionales y se simplifican los factores comunes

Es importante recordar que los ejercicios en los cuales hay numerosos cálculos por resolver, se pueden separar en bloques de operaciones para ser resueltas de forma separada. Una vez se realicen los cálculos, se reemplazan en la expresión original y se repite el proceso tantas veces como sea necesario, es decir, un gran problema, se divide en pequeños problemas.

Resumen de la sección

1. Multiplicación y división de racionales.

2. Notación usada para representar la división de racionales.

Ejercicio 1.7

Ejercicios sobre multiplicación y/o división de racionales

Simplificar los siguientes productos

1. $\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{3}$
2. $\frac{3}{10}\cdot\frac{5}{9}$
3. $\frac{4}{15}\cdot\frac{12}{3}$
4. $\frac{1}{16}\cdot\frac{24}{21}$
5. $\frac{5}{7}\cdot\frac{7}{5}$
6. $\frac{14}{3}\cdot\frac{9}{2}$
7. $\frac{-2}{3}\cdot\frac{4}{7}$
8. $\frac{3}{10}\cdot\frac{10}{5}$
9. $\frac{21}{14}\cdot\frac{7}{3}$
10. $\frac{-2}{3}\cdot\frac{-15}{10}$
11. $\frac{3}{11}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{1}{3}$
12. $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}$
13. $\frac{-1}{2}\cdot\frac{-1}{3}\cdot\frac{3}{11}$
14. $\frac{-5}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{16}{3}$
15. $\frac{-10}{3}\cdot\frac{-12}{5}\cdot\frac{-14}{7}$
16. $\frac{10}{3}\cdot\frac{11}{4}\cdot\frac{12}{5}$
17. $\frac{7}{3}\cdot\frac{21}{10}\cdot\frac{5}{2}$
18. $\frac{-1}{10}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{20}{3}$
19. $\frac{3}{10}\cdot\frac{4}{15}\cdot\frac{2}{5}$
20. $\frac{20}{7}\cdot\frac{-1}{2}\cdot\frac{14}{3}$

Efectuar las siguientes divisiones.

21. $\frac{3}{2}\div\frac{2}{3}$
22. $\frac{4}{5}\div\frac{6}{7}$
23. $\frac{5}{7}\div\frac{16}{7}$
24. $\frac{16}{15}\div\frac{8}{21}$
25. $\frac{12}{7}\div\frac{6}{5}$
26. $\frac{7}{3}\div\frac{-1}{3}$
27. $\frac{-2}{11}\div\frac{-1}{5}$
28. $\frac{9}{16}\div\frac{27}{32}$
29. $\frac{12}{7}\div\frac{14}{3}$
30. $\frac{24}{5}\div\frac{8}{15}$
31. $\frac{5}{6}\div\frac{6}{7}\div\frac{7}{8}$
32. $\frac{8}{5}\div\frac{10}{3}\div\frac{-1}{3}$
33. $\frac{1}{2}\div\frac{1}{4}\div\frac{1}{6}$
34. $\frac{1}{10}\div\frac{3}{100}\div\frac{10}{7}$
35. $\frac{20}{7}\div\frac{1}{9}\div\frac{24}{5}$
36. $\frac{10}{9}\div\frac{13}{4}\div\frac{20}{3}$
37. $\frac{3}{4}\div\frac{5}{7}\div\frac{7}{10}$
38. $\frac{1}{5}\div\frac{2}{5}\div\frac{3}{5}$
39. $\frac{9}{2}\div\frac{3}{16}\div\frac{15}{4}$
40. $\frac{-2}{5}\div\frac{7}{10}\div\frac{5}{8}$

Simplificar las siguientes fracciones compuestas.

41. $\dfrac{5}{2\cdot\dfrac{-3}{-7\div\dfrac{2}{\frac{1}{2}\cdot\frac{-2}{3}}}}$
42. $\dfrac{-7}{-3\div\dfrac{-5}{-3+\frac{3}{2}\cdot\frac{2+1}{5}}}$
43. $\dfrac{1}{-2+\dfrac{1}{-2\cdot\dfrac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{5}}{2-\frac{5}{7}}}}$
44. $\dfrac{\frac{1}{5}\div\frac{-1}{2}}{3\cdot\dfrac{2}{7+\dfrac{-3}{-7+1}}}$
45. $\dfrac{\frac{-1}{2}\cdot\frac{2}{3}}{5+\dfrac{-5}{-1+\dfrac{-2}{\frac{2}{3}\div\frac{-3}{7}}}}$
46. $\dfrac{-3}{-7\cdot\dfrac{7}{3\cdot\dfrac{1}{1+\frac{-1}{2}}}}$
47. $\dfrac{2\cdot\frac{2}{3}}{3+\dfrac{-2}{3+\dfrac{2}{\frac{2}{3}\div\frac{3}{5}}}}$
48. $\dfrac{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}}{-2\cdot\dfrac{-2}{3+\dfrac{7}{1-\frac{1}{7}}}}$

49. $\dfrac{\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2}}{-2+\dfrac{-3}{\frac{2}{3}\cdot\dfrac{-1}{-5+\frac{5}{3}}}}$

50. $\dfrac{-3}{\frac{2}{3}\cdot\dfrac{2}{-1+\dfrac{2}{3\div\frac{-5}{2}}}}$

51. $\dfrac{-5\div\frac{2}{3}}{\dfrac{-3}{5+\dfrac{2}{5\div\frac{-5}{2}}}}$

52. $\dfrac{2\div\frac{1}{2}}{-5+\dfrac{2}{\frac{2}{5}\cdot\dfrac{-5}{\frac{2}{3}\cdot\frac{-3}{7}}}}$

53. $\dfrac{3}{2\cdot\dfrac{2}{-2\cdot\dfrac{-5}{-7\cdot\frac{-5}{7}}}}$

54. $\dfrac{1}{-1+\dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{-5+\dfrac{2}{2\div\frac{2}{3}}}}$

55. $\dfrac{\frac{1}{2}\div\frac{2}{3}}{-1\cdot\dfrac{-3}{2+\dfrac{3}{5\cdot\frac{-5}{3}}}}$

56. $\dfrac{2\div\frac{2}{3}}{\frac{3}{2}+\dfrac{\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{5}}{7-\dfrac{3}{-2+\frac{1}{5}}}}$

57. $\dfrac{1}{3\cdot\dfrac{1}{-1\cdot\dfrac{-3}{-3\cdot\frac{-5}{7}}}}$

58. $\dfrac{2}{\dfrac{\frac{5}{2}}{5\div\dfrac{2}{-3+\frac{5}{3}}}}$

59. $\dfrac{1\cdot\frac{2}{5}}{-2+\dfrac{-2}{-5+\dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}}{-\frac{2}{3}+\frac{-1}{2}}}}$

60. $\dfrac{5\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\frac{1}{2}\div\dfrac{-5}{3\div\dfrac{\frac{1}{2}}{3+\frac{1}{2}}}}}$

1.8 Polinomios aritméticos

Procedimiento 1.10 Simplificar un polinomio aritmético sin signos de agrupación

1. Efectuar todas la divisiones y multiplicaciones, antes que las adiciones o sustracciones.
2. Si hay fracciones, use el método del MCM, si no aplicar el procedimiento 1.3.

Ejemplo 1.29

Simplificar $\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}-\frac{11}{3}\cdot\frac{3}{4}+\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{2}-\frac{7}{10}\div\frac{4}{5}-\frac{7}{10}\div 2$

$\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}-\frac{11}{3}\cdot\frac{3}{4}+\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{2}-\frac{7}{10}\div\frac{4}{5}-\frac{7}{10}\div 2$	Ejercicio dado
$\frac{15}{8}-\frac{11}{4}+2-\frac{7}{8}-\frac{7}{20}$	Se fectúan los productos y cocientes primero
$\frac{15\cdot 5-11\cdot 10+2\cdot 40-7\cdot 5-7\cdot 2}{40}$	Se calcula em MCM de las fracciones
$\frac{75-110+80-35-14}{40}$	Se resuelven los productos en el numerador
$\frac{-4}{40}=\frac{-1}{10}$	Se realizan las sumas, restas y se simplifica la fracción

Se han realizado los productos y divisiones de forma eficiente, por ejemplo el producto $\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{2}$ se calculó así $\frac{\not{4}}{\not{5}}\cdot\frac{\not{5}}{\not{2}}=2$. En aritmética siempre que sea posible se simplifican las expresiones a fin de trabajar con cifras pequeñas y manejables, evitando el uso de la calculadora.

Procedimiento 1.11 Simplificar un polinomio aritmético con signos de agrupación

1. Efectuar primero las multiplicaciones y divisiones de izquierda a derecha.
2. Realizar sumas y restas de izquierda a derecha.
3. Solucionar primero los signos de agrupación más interiores.

Ejemplo 1.30

Determinar el valor de $\left(\frac{-1}{2}+\left(\frac{5}{6}-\frac{2}{7}\right)\right)\div\left\{\left(\frac{11}{9}\cdot\frac{1}{8}\right)+\left[2-\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{3}\right)\right]\right\}$

$\left(\frac{-1}{2}+\left(\boxed{\frac{5}{6}-\frac{2}{7}}\right)\right)\div\left\{\left(\boxed{\frac{11}{9}\cdot\frac{1}{8}}\right)+\left[2-\frac{1}{6}\cdot\left(\boxed{\frac{5}{4}-\frac{1}{3}}\right)\right]\right\}$	Ejercicio dado
$\left(\boxed{\frac{-1}{2}+\frac{23}{42}}\right)\div\left\{\frac{11}{72}+\left[2-\boxed{\frac{1}{6}\cdot\frac{11}{12}}\right]\right\}$	Se solucionan los signos de agrupación más interiores
$\left(\frac{1}{21}\right)\div\left\{\frac{11}{72}+\left[\boxed{2-\frac{11}{72}}\right]\right\}$	Se resuelve el paréntesis. En el corchete se resuelve el producto antes que la diferencia
$\frac{1}{21}\div\left\{\boxed{\frac{11}{72}+\frac{133}{72}}\right\}$	Se resuelve la diferencia en el corchete
$\frac{1}{21}\div\{2\}=\frac{1}{42}$	Se calcula la adición en el corchete y, finalmente, la división

Cada recuadro sombreado, representa las operaciones que se realizan según las indicaciones que se listan en el procedimiento.

Cuando se soluciona un ejercicio donde hay una gran cantidad de operaciones y cálculos que se deben efectuar, como en el ejemplo precedente, el lector debe realizar estas operaciones en una hoja adicional, de manera que no se mezclen todos los cálculos y así evitar un proceso confuso. Una ventaja que se deriva de realizar cálculos auxiliares de forma independiente, es que se puede hacer una revisión del desarrollo del ejercicio de forma eficiente, pues se tiene todo el proceso dividido por segmentos. Finalmente, las matemáticas operativas tienen como objetivo que el

estudiante adquiera competencias que le permitan estructurar formas de pensamiento sistemático, lo cual le permite comprender y elaborar textos de naturaleza científica, como lo es la matemática.

En el ejercicio que sigue, justifica cada paso de la solución, con las razones o conceptos que se aplican a fin de obtener la simplificación en cada paso.

Ejemplo 1.31

Calcular $\left[\left(3\tfrac{1}{4}-4\tfrac{1}{3}\right)-\tfrac{5}{6}\right]\div\left\{\tfrac{11}{12}-\tfrac{1}{2}\left[2\tfrac{1}{3}+\left(1-1\tfrac{1}{4}\right)\right]\right\}$

Justificar cada paso del procedimiento

$\left[\left(3\tfrac{1}{4}-4\tfrac{1}{3}\right)-\tfrac{5}{6}\right]\div\left\{\tfrac{11}{12}-\tfrac{1}{2}\left[2\tfrac{1}{3}+\left(1-1\tfrac{1}{4}\right)\right]\right\}$

$\left[\left(\tfrac{13}{4}-\tfrac{13}{3}\right)-\tfrac{5}{6}\right]\div\left\{\tfrac{11}{12}-\tfrac{1}{2}\left[\tfrac{7}{3}+\left(1-\tfrac{5}{4}\right)\right]\right\}$

$\left[-\tfrac{13}{12}-\tfrac{5}{6}\right]\div\left\{\tfrac{11}{12}-\tfrac{1}{2}\left[\tfrac{7}{3}-\tfrac{1}{4}\right]\right\}$

$\left[-\tfrac{23}{12}\right]\div\left\{\tfrac{11}{12}-\tfrac{1}{2}\left[\tfrac{25}{12}\right]\right\}$

$\left[-\tfrac{23}{12}\right]\div\left\{\tfrac{11}{12}-\tfrac{25}{24}\right\}$

$\left[-\tfrac{23}{12}\right]\div\left\{-\tfrac{1}{8}\right\}$

$\tfrac{46}{3}$

Resumen de la sección

1. Simplificación de polinomios aritméticos.

Ejercicio 1.8

Ejercicios sobre polinomios aritméticos

1. $\left(\left(\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\right)\div\frac{5}{7}\right)-\frac{2}{3}\right)$
2. $\left(\left(\left(\frac{7}{3}\div\frac{5}{2}\right)\cdot\frac{3}{7}\right)+\frac{5}{2}\right)$
3. $\left(\left(\left(\frac{3}{2}-\frac{5}{2}\right)\div\frac{2}{7}\right)\cdot\frac{3}{5}\right)$
4. $\left(\left(\left(\frac{5}{7}\cdot\frac{3}{5}\right)\div\frac{7}{3}\right)\div\frac{2}{7}\right)$
5. $\left(\left(\left(\frac{5}{7}\cdot\frac{7}{2}\right)-\frac{7}{3}\right)\cdot\frac{2}{5}\right)$
6. $\left(\left(\frac{2}{7}-\frac{3}{7}\right)+\frac{7}{3}\right)-\left(\left(\left(1+\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{2}{3}\right)+\frac{5}{2}\right)$
7. $\left(\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}\right)-\left(\left(\left(\frac{7}{3}-\frac{2}{3}\right)+\frac{3}{7}\right)-\frac{2}{5}\right)$
8. $\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}\right)-\left(\left(\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{8}\right)-\frac{1}{16}\right)$
9. $\left(5-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)\div\frac{8}{4}\right)-\left(\left(\left(\frac{16}{4}-\frac{11}{8}\right)+\frac{1}{8}\right)\cdot\frac{1}{2}\right)$
10. $\left(\left(\frac{3}{2}\div\frac{9}{3}\right)\div\frac{5}{2}\right)-\left(\left(\left(\frac{7}{2}+\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{5}{2}\right)\cdot\frac{1}{3}\right)$
11. $\left(\left(\left(1+\frac{5}{7}\right)+\frac{3}{5}\right)-\left(\left(\frac{2}{3}\div\frac{2}{7}\right)\div1\right)\right)\div\left(\frac{2}{7}\cdot\frac{2}{3}\right)$
12. $\left(\left(\left(\frac{1}{2}\cdot1\right)\div\frac{3}{2}\right)-\left(\left(5\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{5}{7}\right)\right)\div\left(\frac{7}{3}\div1\right)$
13. $\left(\left(\left(4\cdot\frac{7}{2}\right)-\frac{3}{2}\right)-\left((1-1)+\frac{5}{2}\right)\right)\div\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{4}\right)$
14. $\left(\left(\left(\frac{7}{2}\div\frac{3}{5}\right)-1\right)-\left(\left(\frac{2}{7}\div1\right)-\frac{5}{3}\right)\right)\div\left(\frac{2}{7}\cdot1\right)$
15. $\left(\left(\left(1+\frac{3}{2}\right)\div\frac{5}{3}\right)-\left(\left(\frac{2}{7}+\frac{3}{7}\right)+\frac{2}{5}\right)\right)\div\left(\frac{5}{7}-\frac{2}{7}\right)$

16. $\left(\left(\left(\frac{5}{3}-\frac{2}{3}\right)-\frac{2}{7}\right)-\left(\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{3}{2}\right)\div\frac{7}{5}\right)\right)\div\left(\frac{2}{5}+\frac{5}{7}\right)$

17. $\left(\left(\left(1-\frac{3}{2}\right)\div\frac{3}{5}\right)-\left(\left(1+\frac{3}{7}\right)-\frac{2}{3}\right)\right)\div\left(\frac{5}{7}\cdot\frac{7}{5}\right)$

18. $\left(\left(\left(-2+\frac{3}{5}\right)-\frac{2}{5}\right)-\left(\left(\frac{3}{5}-1\right)\cdot\frac{5}{7}\right)\right)\cdot\left(1\cdot\frac{5}{2}\right)$

19. $\left(\left(\left(\frac{3}{7}\div\frac{2}{7}\right)\cdot 1\right)-\left(\left(\frac{5}{7}\cdot 1\right)+\frac{5}{7}\right)\right)\div\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\right)$

20. $\left(\left(\left(2\cdot\frac{2}{7}\right)+\frac{2}{3}\right)-\left(\left(\frac{2}{5}-\frac{7}{5}\right)+\frac{2}{3}\right)\right)\div\left(1\div\frac{2}{7}\right)$

21. $\left(\left(\left(\frac{3}{7}-\frac{2}{3}\right)\cdot 7\right)-\left(\left(\frac{3}{7}+1\right)\div\frac{2}{3}\right)\right)\cdot\left(\frac{3}{5}\div\frac{2}{3}\right)$

1.9 Sistema de los números irracionales

La definición de los irracionales se hace en contraposición con la de los números racionales, es decir un número irracional es un número que no es racional [8]. Los racionales representan la razón entre dos enteros, pero los irracionales son números que no se pueden expresar como la razón entre 2 enteros.

Definición 1.12 Sistema de los números irracionales

El sistema de los números irracionales está formado por todos los números del conjunto $\mathbb{Q}^*$ tales que no se pueden expresar la forma $\frac{a}{b}$ con a y b enteros.

Si bien la definición es matemáticamente correcta no proporciona un ejemplo o forma como se expresó en las definiciones de enteros y racionales, motivo por el cual existe dificultad para que el lector la aplique a un número a fin de establecer su naturaleza, es por esto por lo que en la práctica resulta conveniente usar la representación decimal de un número como mecanismo para determinar la irracionalidad del mismo. En este sentido se puede afirmar que un número irracional expresado en forma decimal, tiene infinitas cifras decimales no periódicas, y un número racional puede[9] tener infinitas cifras decimales periódicas.

De los números irracionales hay un grupo de ellos que vale la pena citar porque son empleados con mucha frecuencia en las matemáticas aplicadas.

(N) Irracionales de uso frecuente.

1). Raíz de dos	$\sqrt{2}\approx$	1,4142135623730950488016887242096980785696718753769480731766797...
2). Número de *euler*	$e\approx$	2,7182818284590452353602874713526624977572470936999595749669676...
3). Número *pi*	$\pi\approx$	3,1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445...
4). Número de *oro*	$\phi\approx$	1,6180339887498948482045868343656381177203091798057628621354486...

La figura muestra su localización en la recta real

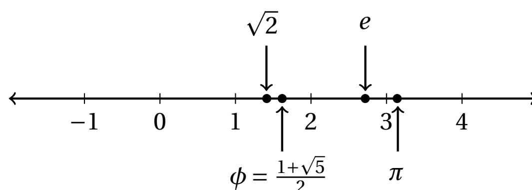


Figura 1.3: En la recta real ubicación de irracionales

[8] El sistema de los números reales está formado básicamente por racionales e irracionales.

[9] Hay números racionales con finitas o infinitas cifras decimales, ej $\frac{1}{2}=0{,}5$, pero $\frac{1}{3}=0{,}33333...$

1.10 Sistema de los números reales

El sistema de los números reales está formado por los conjuntos que se han definido en las secciones 1.1, 1.11 y 1.12; Se presentan una figura en la cual se muestra la forma como estos sistemas numéricos se acomodan para dar origen a los números reales.

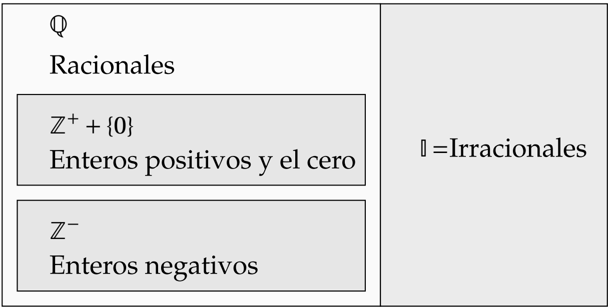


Figura 1.4: Sistema de los números reales.

En la Figura 1.4 se puede ver que un número entero es a la vez entero y racional, pero un racional no necesariamente es entero. De otro lado los números racionales e irracionales no tiene elementos en común, así que básicamente un número real es racional o irracional.

Propiedades de los números reales

En los números reales hay dos operaciones que cumplen una serie de propiedades, y es de vital importancia su comprensión y dominio. La tabla que sigue presenta las propiedades de los números reales para la adición y multiplicación.

Sean a, b y c reales, entonces se cumplen las siguientes propiedades.

Propiedad	Adición	Multiplicación
1. Clausurativa	La suma de los reales a y b es un real	El producto de los reales a y b es un real
2. Asociativa	$(a+b)+c = a+(b+c)$	$(ab)c = a(bc)$
3. Modulativa	El *cero* es el modulo de la adición por tanto se cumple que $a+0=0+a=a$	El *uno* es el modulo de la multiplicación es decir que $(a)(1)=(1)(a)=a$
4. Invertiva	Todo real a tiene un inverso aditivo $-a$ tal que $a+(-a)=(-a)+(a)=0$	Todo real a tiene un inverso[10] multiplicativo $\frac{1}{a}$ y se cumple que $(a)\left(\frac{1}{a}\right)=\left(\frac{1}{a}\right)(a)=1$
5. Conmutativa	Sumar a con b es lo mismo que sumar b con a	Multiplicar a por b es lo mismo que calcular b por a

Cuadro 1.1: Propiedades de la adición y multiplicación en reales

Hay una propiedad que está relacionada con las dos operaciones, esta es la *Ley Distributiva de la Multiplicación respecto de la Adición*, y dada su importancia la enunciamos de forma separa a la tabla anterior.

[10] El inverso multiplicativo de a se simboliza como a^{-1}

Propiedad 1.4 Sean a, b y c ℝeales, entonces se cumple que:[11]

$$a(b+c) = ab + ac$$

Más adelante cuando se enuncien las otras operaciones aritméticas, se analizará cuáles de las propiedades anteriores se cumplen o no.

1.11 Respuesta ejercicios del capítulo

1. 11
2. −38
3. 2
4. −10
5. −27
6. 71
7. −29
8. 6
9. 35
10. −46
11. 50
12. 4
13. −33
14. −49
15. 7
16. 13
17. −3
18. 1
19. −27
20. 9
21. 12
22. −36
23. 0
24. −13
25. 0
26. 43
27. −41
28. 14
29. 10
30. −6
31. 3
32. −30
33. 29
34. −14
35. −5
36. 5 años
37. 16
38. 0
39. 9
40. 120 postes
41. 11
42. 33
43. 19
44. 12
45. 8
46. 6
47. 9
48. 28
49. 0
50. 17

Respuestas ejercicio 1.2

1. 2^4
2. $2^2 \cdot 5^2$
3. 3^3
4. 5^2
5. 7^3
6. $2 \cdot 7^2$
7. $3 \cdot 5^3$
8. $2^3 \cdot 3^3$
9. 2^6
10. 3^4
11. $2^2 \cdot 3 \cdot 11$
12. 5^4
13. $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$
14. $2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13$
15. 3^6
16. 7^2
17. 2^9
18. $3^2 \cdot 5 \cdot 7$
19. $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$
20. $3^2 \cdot 5^2$
21. $5^2 \cdot 7^3$
22. $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2$
23. $5^2 \cdot 7 \cdot 11^2$
24. $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$
25. $3^3 \cdot 5 \cdot 11$
26. 11^3
27. $5^2 \cdot 11 \cdot 13$
28. $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$
29. $3^4 \cdot 11 \cdot 17$
30. $5^3 \cdot 7^3$
31. $2^5 \cdot 3 \cdot 11^2$
32. $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^4$

Respuestas ejercicio 1.3

1. 20
2. 24
3. 15
4. 4
5. 1
6. 8

[11] En álgebra se usa esta la ley así: $ab + ac = a(b+c)$ y a este proceso se le conoce como factorización

7. 45
8. 10
9. 40
10. 3
11. 3
12. 25
13. 1
14. 9
15. 15
16. 6
17. 6
18. 20
19. 48
20. 2
21. 8
22. 15
23. 1
24. 1
25. 7
26. 12
27. 22
28. 30
29. 1
30. 24

Respuestas ejercicio 1.4

1. 40
2. 42
3. 48
4. 36
5. 75
6. 88
7. 200
8. 420
9. 50
10. 210
11. 126
12. 105
13. 360
14. 60
15. 252
16. 150
17. 240
18. 900
19. 315
20. 1800
21. 210
22. 945
23. 210
24. 180
25. 700
26. 1320
27. 3465
28. 1540
29. 1540
30. 360
31. 600
32. 2300
33. 504

Respuestas ejercicio 1.5

1. $-\frac{3}{2}$
2. $\frac{1}{3}$
3. $\frac{5}{11}$
4. $\frac{7}{12}$
5. $-\frac{18}{3}$
6. $\frac{1}{3}$
7. $-\frac{9}{5}$
8. $\frac{1}{2}$
9. $\frac{5}{2}$
10. $\frac{7}{3}$
11. $-\frac{3}{4}$
12. $\frac{11}{14}$
13. $\frac{5}{16}$
14. $\frac{6}{7}$
15. $\frac{7}{10}$
16. $\frac{15}{14}$
17. $-\frac{12}{25}$
18. $\frac{63}{76}$
19. $-\frac{6}{7}$
20. $\frac{55}{37}$
21. $\frac{3}{15}$ y $\frac{10}{15}$
22. $\frac{-6}{4}$ y $\frac{11}{4}$
23. $\frac{45}{6}$ y $\frac{14}{6}$
24. $\frac{-25}{30}$ y $\frac{-3}{30}$
25. $\frac{9}{48}$ y $\frac{56}{48}$
26. $\frac{16}{28}$ y $\frac{49}{28}$
27. $\frac{16}{18}$ y $\frac{21}{18}$
28. $\frac{20}{42}$ y $\frac{-21}{42}$
29. $\frac{33}{30}$ y $\frac{-24}{30}$
30. $\frac{65}{120}$ y $\frac{56}{120}$
31. $\frac{15}{30}, \frac{10}{30}$ y $\frac{-1}{6}$
32. $\frac{6}{30}, \frac{16}{30}$ y $\frac{15}{30}$
33. $\frac{45}{63}, \frac{98}{63}$ y $\frac{48}{63}$
34. $\frac{1000}{490}, \frac{-35}{490}$ y $\frac{539}{490}$
35. $\frac{-100}{220}, \frac{484}{220}$ y $\frac{605}{220}$
36. $\frac{27}{144}, \frac{32}{144}$ y $\frac{20}{144}$
37. $\frac{-4}{60}, \frac{-3}{60}$ y $\frac{-5}{60}$
38. $\frac{30}{165}, \frac{99}{165}$ y $\frac{275}{165}$
39. $\frac{8}{42}, \frac{7}{42}$ y $\frac{-77}{42}$
40. $\frac{66}{72}, \frac{-80}{72}$ y $\frac{45}{72}$

Respuestas ejercicio 1.6

1. $-\frac{2}{15}$

2. $-\frac{101}{45}$
3. $\frac{20}{81}$
4. $\frac{37}{15}$
5. $\frac{190}{27}$
6. $\frac{118}{75}$
7. $\frac{23}{135}$
8. $-\frac{73}{45}$
9. $\frac{95}{54}$
10. $\frac{67}{25}$
11. $\frac{19}{30}$
12. $-\frac{5}{6}$
13. $\frac{191}{63}$
14. $\frac{181}{63}$
15. $\frac{139}{44}$
16. $-\frac{25}{144}$
17. $-\frac{1}{5}$
18. $\frac{404}{165}$
19. $-\frac{31}{21}$
20. $\frac{31}{72}$
21. 6
22. 8000
23. 32
24. $\frac{2}{3}$
25. 317
26. 30
27. 120 litros
28. $12U$
29. Hay más mujeres que hombres

Respuestas ejercicio 1.7

1. $\frac{4}{15}$
2. $\frac{1}{6}$
3. $\frac{16}{15}$
4. $\frac{1}{14}$
5. 1
6. 21
7. $\frac{-8}{21}$
8. $\frac{3}{5}$
9. $\frac{7}{2}$
10. 1
11. $\frac{7}{66}$
12. $\frac{2}{5}$
13. $\frac{1}{22}$
14. -10
15. -16
16. 22
17. $\frac{49}{4}$
18. $-\frac{4}{15}$
19. $\frac{4}{125}$
20. $-\frac{20}{3}$
21. $\frac{9}{4}$
22. $\frac{14}{15}$
23. $\frac{5}{16}$
24. $\frac{14}{5}$
25. $\frac{10}{7}$
26. -7
27. $\frac{10}{11}$
28. $\frac{2}{3}$
29. $\frac{18}{49}$
30. 9
31. $\frac{10}{9}$
32. $-\frac{36}{25}$
33. 12
34. $\frac{7}{3}$
35. $\frac{75}{14}$
36. $\frac{2}{39}$
37. $\frac{3}{2}$
38. $\frac{5}{6}$
39. $\frac{32}{5}$
40. $-\frac{32}{35}$
41. $-\frac{35}{36}$
42. $\frac{50}{9}$
43. $-\frac{7}{29}$
44. $-\frac{1}{2}$
45. $\frac{2}{75}$
46. $\frac{18}{49}$
47. $\frac{16}{31}$
48. $\frac{67}{72}$
49. $-\frac{5}{68}$
50. 6
51. 10
52. $-\frac{28}{33}$
53. $\frac{3}{2}$
54. $-\frac{26}{27}$
55. $\frac{41}{100}$
56. $\frac{52}{27}$
57. $\frac{7}{15}$
58. $-\frac{8}{3}$
59. $-\frac{37}{150}$
60. $-\frac{21}{2}$

Respuestas ejercicio 1.8

1. $\frac{11}{15}$
2. $\frac{29}{10}$

3. $-\frac{21}{10}$
4. $\frac{9}{14}$
5. $\frac{1}{15}$
6. $-\frac{83}{42}$
7. $-\frac{93}{70}$
8. $\frac{9}{16}$
9. $\frac{29}{8}$
10. $-\frac{61}{20}$
11. $-\frac{1}{10}$
12. $-\frac{43}{49}$
13. 30
14. $\frac{87}{4}$
15. $\frac{9}{10}$
16. $-\frac{25}{26}$
17. $-\frac{67}{42}$
18. $-\frac{53}{14}$
19. $\frac{1}{42}$
20. $\frac{22}{49}$
21. $-\frac{24}{7}$

2 Potenciación

2.1 Potenciación

El capítulo 1 fue dedicado al estudio de las cuatro operaciones básicas de la aritmética como son la adición, sustracción, multiplicación y división; además se definieron los cuatro sistemas numéricos más importantes: enteros ($\mathbb{Z}$), racionales ($\mathbb{Q}$), irracionales ($\mathbb{I}$ o $\mathbb{Q}^*$) y por supuesto los reales. Los capítulos que restan serán dedicados al estudio de la potenciación, radicación y logaritmación, además de las aplicaciones del concepto de proporcionalidad.

Definición 2.1 Potenciación

Sean a, b $\mathbb{R}$eales y n un $\mathbb{Z}^+$, se define a^n así

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots a}_{n \text{ veces } a} = b$$

a es la base, n el exponente y b la potencia

De la definición se aprecia que la potenciación es una operación definida en términos de una multiplicación, así que para calcular una potencia se debe hacer en realidad una multiplicación.

Ejemplo 2.1 –Cálculo de potencias

Calcular la potencia 2^5

2^5	Ejercicio dado
$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{5 \text{ veces } 2}$	Se aplica la definición de potenciación
$(2 \cdot 2)(2 \cdot 2)(2)$	Propiedad asociativa de $\mathbb{R}$eales
$(4)(4)(2)$	Se efectuan los productos en los paréntesis
$(4 \cdot 4)(2)$	Propiedad asociativa de $\mathbb{R}$eales
$(16)(2)$	Se opera en el paréntesis
32	Se opera, con lo cual 32 es la quinta potencia de 2

De la definición de potenciación dada en 2.1 se derivan consecuencias relacionadas con potencias que resultan con frecuencia.

Vocabulario 2.1 Potencias especiales

1). $a^0 = 1$ Todo número real elevado a la cero equivale a 1, con $a \neq 0$

2). $a^1 = a$ Todo número real siempre tiene exponente 1

3). $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$ a^{-1} es el inverso multiplicativo de a, con $a \neq 0$

4). $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1} = \left(\dfrac{b}{a}\right)$ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1}$ es el inverso multiplicativo de $\left(\dfrac{b}{a}\right)$, con $a \neq 0$ y $b \neq 0$

5). $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^{n}$ En general, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n}$ es el inverso multiplicativo de $\left(\dfrac{b}{a}\right)^{n}$, con $a \neq 0$ y $b \neq 0$

Estas potencias especiales serán de vital importancia al momento de simplificar expresiones que contienen exponentes, así que su uso se hará más adelante.

Aplicación del concepto de potenciación

Ejercicio 2.1

Cálculo de potencia, base y exponente

Usar la definición de potenciación para calcular las siguientes potencias.

1. 9^2
2. 9^3
3. 5^2
4. 5^3
5. 4^2
6. 4^3
7. 14^2
8. 1^3
9. 7^2
10. 7^3
11. 26^2
12. 17^2
13. 11^2
14. 29^2
15. 11^2
16. 22^2
17. 33^2
18. 21^2
19. 19^2
20. $\frac{1}{2}$

Determinar cuál es el exponente, de manera que la igualdad se cumpla.

21. $11^x = 121$
22. $0^x = 0$
23. $9^x = 81$
24. $9^x = 729$
25. $2^x = 4$
26. $2^x = 8$
27. $4^x = 16$
28. $4^x = 64$
29. $3^x = 9$
30. $3^x = 27$
31. $22^x = 484$
32. $30^x = 900$
33. $34^x = 1156$
34. $29^x = 841$
35. $21^x = 441$
36. $19^x = 361$
37. $35^x = 1225$
38. $16^x = 256$
39. $28^x = 784$
40. $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{27}$

Con qué base se cumple cada igualdad.

41. $x^2 = 25$
42. $x^3 = 125$
43. $x^2 = 64$
44. $x^3 = 512$
45. $x^2 = 49$
46. $x^3 = 343$
47. $x^2 = 4$
48. $x^3 = 8$
49. $x^2 = 100$
50. $x^3 = 1000$
51. $x^2 = 361$
52. $x^2 = 1089$
53. $x^2 = 900$
54. $x^2 = 144$
55. $x^2 = 289$
56. $x^2 = 1024$
57. $x^2 = 900$
58. $x^2 = 121$
59. $x^2 = 729$
60. $x^3 = \frac{1}{16}$

2.2 Leyes de la potenciación

A continuación se presentan las leyes de la potenciación en un orden que obedece al uso que se hace de ellas, en función de su aplicación en la simplificación.

Propiedad 2.1 Potencia de una potencia

$$\left(a^m\right)^n = a^{mn}$$

Es la misma base a elevada al producto $m \cdot n$

Ejemplo 2.2 –Cálculo de potencia de una potencia

Calcular $\left(3^2\right)^4$

$\left(3^2\right)^4$	Ejercicio dado
$3^{(2)\cdot(4)}$	Se aplica la propiedad potencia de una potencia
3^8	Se efectua el producto indicado

Cuando se aplican las leyes de la potenciación, es frecuente dejar indicadas las potenciaciones, es decir, no se determina cuál es el valor de 3 elevado a la octava potencia.

Propiedad 2.2 Potencia de un producto

$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$$

Es el producto de las bases a por b elevadas cada una al exponente m

Ejemplo 2.3 –Cálculo de potencia de un producto

Calcular $(2 \cdot 5)^7$

$(2 \cdot 5)^7$	Ejercicio dado
$2^7 \cdot 5^7$	Se aplica la propiedad potencia de un producto

Para efectuar una potenciación, se suelen aplicar varias leyes de forma simultánea; este es un ejemplo donde se apliquen dos leyes de forma simultánea.

Ejemplo 2.4 –Simplificación de una potenciación

Calcular $\left(2^3 \cdot 7^{-2}\right)^{-2}$

$\left(2^3 \cdot 7^{-2}\right)^{-2}$	Ejercicio dado
$\left(2^3\right)^{-2} \cdot \left(7^{-2}\right)^{-2}$	Se aplica la propiedad potencia de un producto
$2^{-6} \cdot 7^4$	Se aplica la propiedad potencia de una potencia

La cantidad de pasos que se empleen en la solución de un ejercicio depende de la práctica de las leyes, así que en el ejemplo precedente se pueden aplicar de una vez las dos leyes, es decir: $\left(2^3 \cdot 7^{-2}\right)^{-2} = 2^{-6} \cdot 7^4$

Propiedad 2.3 Potencia de un cociente.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

Es el cociente de las bases a y b con $b \neq 0$ elevadas cada una al exponente m

Los ejemplos anteriores han presentado simplificaciones de potencias de números primos, esto no siempre va a ser de esa forma. Cuando se presente un ejercicio en el cual hay que simplificar potencias de números enteros, lo primero que se debe hacer es factorizarlos.

Ejemplo 2.5 –Simplificación de una potenciación

Calcular $\left(\frac{36}{25}\right)^5$

$\left(\frac{36}{25}\right)^5$	Ejercicio dado
$\left(\frac{2^2 \cdot 3^2}{5^2}\right)^5$	Se descomponen en factores primos a 36 y 25
$\frac{2^{10} \cdot 3^{10}}{5^{10}}$	Se aplican las propiedades potencia de una potencia, de producto y de un cociente

Nótese que las propiedades enunciadas hasta ahora cumplen como función expresar cada base con un único exponente, además, las leyes potencia de un producto y de un cociente se pueden entender como una ley *distributiva* de los exponentes, respecto del producto o cociente de potencias.

Propiedad 2.4 Producto de potencias con igual base $\underbrace{a^m \cdot a^n}_{\text{igual base a}} = a^{m+n}$

Es igual a la misma base a elevada a la suma $m+n$

Ejemplo 2.6 –Simplificación de una potenciación

Simplificar $\left(\frac{36}{25}\right)^5 6^2$

$\left(\frac{36}{25}\right)^5 6^2$	Ejercicio dado
$\frac{2^{10} \cdot 3^{10}}{5^{10}} \cdot (2 \cdot 3)^2$	Se descompon en factores primos a 6
$\frac{2^{10} \cdot 3^{10} \cdot 2^2 \cdot 3^2}{5^{10}}$	Se aplica la propiedad potencia de un producto y se multiplican las fracciones
$\frac{2^{12} \cdot 3^{12}}{5^{10}}$	Se ha aplicado la propiedad Producto de potencias con igual base

Simplificar una potenciación consiste en expresar el resultado final en potencias de números primos, de forma que cada base sólo aparezca una vez; como lo presenta el ejemplo, donde se han combinado las bases 2 y 3 en una sola potencia.

Propiedad 2.5 Cociente de potencias con igual base

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Es igual a la misma base a con $a \neq 0$ elevada a la diferencia $m - n$ si $m > n$

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$$

Es igual a *uno* sobre la misma base a con $a \neq 0$ elevada a la diferencia $n - m$ si $m < n$

Resumen de la sección

1. Definición de potenciación
2. Leyes de la potenciación

Ejercicio 2.2

Simplificación de productos y cocientes de potencias

Simplificar las siguientes expresiones. Entiéndase el operador ":" como "÷".

1. $(-2)^5 : (2^{-2})$
2. $(-15)^2 : (15^2)$
3. $(-1)^{-3} : (-1)^6$
4. $3^{-1} : 3^{-5}$
5. $(-2)^6 : (-2^4)$
6. $4^5 : 4^{-9}$
7. $(-3)^3 : (-3^5)$
8. $(-1)^{29} : (-1)^{-36}$
9. $1^{-36} : 1^{72}$
10. $(-2)^6 : (2^{-8})$
11. $2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^5$
12. $3^{-4} \cdot 3^5 \cdot 3^{-1}$
13. $-2^3 : (-2^{-3})$
14. $-4^3 : (-4^8)$
15. $5^4 : (5^7)$
16. $-5^{-2} : (-5^4)$
17. $-1^{-24} : (-1^{15})$
18. $5^{-2} \cdot 5^{-1} \cdot 5^3 \cdot 5^2 \cdot 5^{-1}$
19. $-2^{-1} \cdot (-2^{-1}) \cdot (-2)^{-1} \cdot (-2)^4$
20. $(-1)^{-1} \cdot (-1)^{-1} \cdot (-1)^{-1} \cdot (-1)^{72}$
21. $-23^{11} \cdot (-23)^{-15} \cdot (-23)^4$
22. $(-35)^{-1} \cdot (-35)^4 \cdot (-35)^{-2}$
23. $(-11)^6 \cdot (-11)^{-4} \cdot (-11)^{-8}$
24. $5^3 \cdot 5^4$
25. $5^3 : 5^4$
26. $(5^3)^4$
27. $\dfrac{2^5 \cdot 3^8 \cdot 7^7 \cdot 5^2}{3^4 \cdot 3^2 \cdot 3^9 \cdot 7^4 \cdot 7^8}$
28. $\dfrac{7^5 \cdot 5^4 \cdot 7^9 \cdot 2}{7^2 \cdot 5^4 \cdot 5 \cdot 3^7 \cdot 2}$
29. $\dfrac{6^5 \cdot 4^4 \cdot 5^8 \cdot 4^9}{6 \cdot 3^6 \cdot 2^9 \cdot 5^6 \cdot 4^2}$
30. $\dfrac{5^2 \cdot 3^4 \cdot 3^7}{9^2 \cdot 6^5 \cdot 5^9 \cdot 7}$
31. $\dfrac{7^2 \cdot 9^4 \cdot 5}{4 \cdot 7^2 \cdot 8^2 \cdot 5^2}$
32. $\dfrac{7^6 \cdot 3^8 \cdot 4^8}{7 \cdot 4 \cdot 3^2 \cdot 2^6}$
33. $\dfrac{2^5 \cdot 5^8 \cdot 6^8}{5^7 \cdot 7^2 \cdot 2^3 \cdot 5^4}$
34. $\dfrac{7^6 \cdot 6 \cdot 5^6}{9^5 \cdot 9^6 \cdot 6^6 \cdot 2^9}$
35. $\dfrac{9^8 \cdot 4^3 \cdot 7^8}{7^3 \cdot 2^6 \cdot 6^8 \cdot 2^2}$
36. $\dfrac{3^7 \cdot 2^3 \cdot 4^6}{4^9 \cdot 8^2 \cdot 7^6 \cdot 7^2}$
37. $\dfrac{8^{-3} \cdot (-2)^{-7} \cdot 3^6}{2^{-7} \cdot (-3)^{-7} \cdot (-5)^{-3}}$
38. $\dfrac{6^{-5} \cdot 8^{-8} \cdot 3^8}{3^{-9} \cdot (-3)^{-8} \cdot 2^{-2}}$
39. $\dfrac{8^2 \cdot 5^7 \cdot (-5)^{-9}}{7^2 \cdot 5^4 \cdot (-3)^4}$
40. $\dfrac{8^{-6} \cdot 2^2 \cdot (-2)^{-8}}{2^{-2} \cdot 8^{-5} \cdot (-5)^3}$
41. $\dfrac{6^{-2} \cdot 3^{-4} \cdot (-1)^{-4}}{4^{-5} \cdot (-2)^{-7} \cdot 5^{-5}}$
42. $\dfrac{4^2 \cdot 5^{-1} \cdot 8^{-2}}{5^{-7} \cdot (-1)^9 \cdot 5^7}$

Guía de cómo simplificar una expresión con potencias

Las secciones precedentes han presentado ejemplos que clarifican la forma como se aplican e interpretan las propiedades de la potenciación; luego de este proceso es claro que la manera en que se resuelva un ejercicio varía dependiendo del orden en que se apliquen las propiedades. Se da a continuación una guía que se puede aplicar con el objeto de simplificar cualquier expresión en la que haya cocientes y productos de potencias.

Ⓝ Guía de cómo simplificar una expresión con productos y cocientes de potencias

Aplicar en el siguiente orden los procedimientos que se listan a continuación:

	Propiedad	Ejemplo
1). Descomponer en factores primos todos los números		
2). Potencia de una potencia	$(a^m)^n = a^{m\cdot n}$	$\left(3^2\right)^{-4} = 3^{2\cdot(-4)} = 3^{-8}$
3). Potencia de un producto	$(a\cdot b)^n = a^n b^n$	$(3\cdot 5)^2 = 3^2 5^2$
4). Potencia de un cociente	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^5 = \frac{3^5}{4^5}$
5). Definición de inverso multiplicativo	$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$	$\frac{1}{5^2} = 5^{-2}$
6). Producto de potencias con igual base	$a^n a^m = a^{n+m}$	$7^3 7^{-8} = 7^{3+(-8)} = 7^{-5}$
7). Expresar todas las potencias con exponente positivo		

2.3 Ejercicios resueltos

Ejemplo 2.1. *Simplificar la expresión* $\dfrac{2^2\cdot 7\,(4)^{-4}\,(9)^3\,(3)^2}{2^2\cdot(4)^5\,(9)^4}$

$\dfrac{2^2\cdot 7\,(4)^{-4}\,(9)^3\,(3)^2}{2^2\cdot(4)^5\,(9)^4}$	*Ejercicio dado*
$\dfrac{2^2\cdot 7\left(2^2\right)^{-4}\left(3^2\right)^3(3)^2}{2^2\cdot\left(2^2\right)^5\left(3^2\right)^4}$	*Descomponiendo los números* 4 *y* 9
$\dfrac{2^2\cdot 7\left(2^{-8}\right)\left(3^6\right)\left(3^2\right)}{2^2\cdot\left(2^{10}\right)\left(3^8\right)}$	*Potencia de una potencia*
$2^2\cdot 7\cdot 2^{-8}\cdot 3^6\cdot 3^2\cdot 2^{-2}\cdot 2^{-10}\cdot 3^{-8}$	*Definición de inverso multiplicativo*
$2^{2-8-2-10}3^{6+2-8}7$	*Producto de potencias con igual base*
$2^{-18}3^0 7$	*Efectuando operaciones*
$\dfrac{7}{2^{18}}$	*Definición de inverso multiplicativo y* $3^0 = 1$

Ejemplo 2.2. *Calcular* $\left(\frac{2^3}{2}\right)^{-2}\left(16\cdot 2^{-3}\right)^{-1}$

$\left(\frac{2^3}{2}\right)^{-2}\left(16\cdot 2^{-3}\right)^{-1}$	*Ejercicio dado*
$\left(\frac{2^3}{2}\right)^{-2}\left(2^4\cdot 2^{-3}\right)^{-1}$	*Descomponiendo* 16 *en factores primos*
$\frac{2^{-6}}{2^{-2}}\cdot 2^{-4}\cdot 2^3$	*Potencia de una potencia, de cociente y producto*
$2^{-6}\cdot 2^{-4}\cdot 2^3\cdot 2^2$	*Definición de inverso multiplicativo*
$2^{-6-4+3+2}$	*Producto de potencias con igual base*
2^{-5}	*Operando*
$\frac{1}{2^5}$	*Expresando con exponentes positivos*

Ejemplo 2.3. *Operar* $\left(\frac{4^{-1}6^2 9^{-2}}{4^2 6^2 9^{-3}}\right)^{-4}\div\left(\frac{4^{-1}6^3 9}{4^3 6^{-1}}\right)^{-1}$

$\left(\frac{4^{-1}6^2 9^{-2}}{4^2 6^2 9^{-3}}\right)^{-4}\div\left(\frac{4^{-1}6^3 9}{4^3 6^{-1}}\right)^{-1}$	*Ejercicio dado*
$\left(\frac{\left(2^2\right)^{-1}\cancel{6^2}\left(3^2\right)^{-2}}{\left(2^2\right)^2\cancel{6^2}\left(3^2\right)^{-3}}\right)^{-4}\div\left(\frac{\left(2^2\right)^{-1}(2\cdot 3)^3\left(3^2\right)}{\left(2^2\right)^3(2\cdot 3)^{-1}}\right)^{-1}$	*Descomponer en factores primos*
$\frac{2^8 3^{16}}{2^{-16}3^{24}}\cdot\frac{2^{-6}\cdot 2\cdot 3}{2^2\cdot 2^{-3}\cdot 3^{-3}\cdot 3^{-2}}$	*Potencia de una potencia, de cociente y producto* *Dividir por a/b es multiplicar por b/a* *Se cancelan factores comunes cuando es posible*
$\frac{2^8\cdot 3^{16}\cdot 2^{-6}\cdot 2\cdot 3}{2^{-16}\cdot 3^{24}\cdot 2^2\cdot 2^{-3}\cdot 3^{-3}\cdot 3^{-2}}$	*Se efectúo la multiplicación*
$2^8\cdot 3^{16}\cdot 2^{-6}\cdot 2\cdot 3\cdot 2^{16}\cdot 3^{24}\cdot 2^{-2}\cdot 2^3\cdot 3^3\cdot 3^2$	*Definición de inverso multiplicativo*
$2^{20}3^{-2}$	*Producto de potencias con igual base*
$\frac{2^{20}}{3^2}$	*Expresando con exponentes positivos*

El siguiente ejemplo presenta un ejercicio que contempla potencias de números negativos como $(-3)^2$. Se aplica la definición de la potenciación se obtiene que $(-3)^2=(-3)(-3)=9$.

En general cuando una base negativa esta afectada por un exponente par, el resultado es positivo. Por otra parte, la expresión $(-3)^3$ es equivalente a $(-3)(-3)(-3)=-27$, con lo cual se puede generalizar que una base negativa elevada a un exponente impar da como resultado un valor negativo.

En la escritura de operaciones indicadas de potenciación, el uso de los signos de agrupación es fundamental, por ejemplo la operación -3^2 da como resultado -9, pues el cuadrado *no* afecta el signo negativo. Esta apreciación es importante tenerla presente cuando realizamos este tipo de operaciones en la calculadora, ya que resulta frecuente que para calcular $(-3)^2$ se escriba en la calculadora -3^2 lo cual es erróneo pues $(-3)^2\neq -3^2$.

2.4 Ejercicios del capítulo

Ejercicio 2.3

Simplificación de operaciones indicadas

Determinar por qué cantidad hay que multiplicar los siguientes números de manera que el resultado obtenido sea el mínimo cuadrado perfecto posible (recuerde que un cuadrado perfecto es un entero que tiene raíz exacta).

1. 8
2. 27
3. 18
4. 48
5. 45
6. 28
7. 12
8. 32
9. 50
10. 20
11. $\frac{1}{2}$
12. $\frac{1}{12}$
13. $\frac{5}{7}$
14. $\frac{9}{\sqrt{2}}$
15. $-\frac{20}{\sqrt{5}}$

Expresar las siguientes potencias como producto de factores, aplicando la definición de potenciación:

16. $(-7)^3$
17. $(-2)^5 \cdot 3^2$
18. 4^{-3}
19. -3^4
20. -5^{-3}
21. $(-1)^{-4}$
22. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$
23. $\left(\frac{-1}{5}\right)^3$

Sustituir los asteriscos por números tales que la igualdad se cumpla:

24. $\left(\frac{3}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{*}{*}\right)^3$
25. $\left(\frac{2}{3} : \frac{5}{7}\right)^* = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} : \left(\frac{5}{7}\right)^{-2}$
26. $\left((-3)^3\right)^4 = (-3)^*$
27. $\left(\frac{2}{3}\right)^* \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^2$
28. $\left(\frac{3}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{-1} = \left(\frac{3}{5}\right)^3 : \frac{*}{*}$
29. $\left(-\frac{2}{3}\right)^* = \frac{9}{4}$
30. $\left(\left(-\frac{3}{2}\right)^*\right)^2 = \left(-\frac{2}{3}\right)^6$
31. $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^* = \left(\frac{2}{3}\right)^4$

Evaluar las siguientes expresiones

32. $9^{-4^{-2^{-1}}}$
33. $2^{-3} \cdot 7$
34. $\left(\frac{4}{3}\right)^{-2} \cdot 4$
35. $\left[\left(\frac{2}{2}\right)^4\right]^2$
36. $\left(\frac{3}{5} \times \frac{20}{12}\right)^2$
37. $\left(\frac{-2}{3}\right)^5 \times \left(\frac{-3}{2}\right)^2$
38. $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]^2$
39. $\left(\frac{2}{7}\right)^{-2}$
40. $\left[\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}\right]^{-2}$
41. $\left(\frac{2}{5}\right)^{3^2}$
42. $\left((-2^3)^{-1}\right)^2$
43. $\left(\left((-4^3)^{-3}\right)^{-1}\right)^2$
44. $\left(\left((5^4)^{-1}\right)^{-2}\right)^{-1}$
45. $\left((-5^2)^{-5}\right)^{-1}$

46. $\left(\left(-1^{24}\right)^2\right)^{-2}$

47. $\left(\left(-2^5\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2$

48. $\left(\left(\left(-15^2\right)^{-1}\right)^{-2}\right)^{-3}$

49. $\left(\left((-1)^2\right)^{-2}\right)^{-2}$

50. $\left(\left(\left(3^{-2}\right)^{-1}\right)^{-1}\right)^{-1}$

51. $\left(\left(\left(-2^6\right)^{-1}\right)^{-5}\right)^4$

52. $\left(\left(\left(4^5\right)^2\right)^{-1}\right)^{-1}$

53. $\left(\left(\left(-3^3\right)^3\right)^{-3}\right)^{-1}$

54. $\left[\dfrac{2^3\cdot 5^2}{3^{-2}\cdot 4}\right]^{-4}$

55. $\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-7}:\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-6}\right]\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}$

56. $\left[\left(2^{-2}\right)^{-3}\right]^{-4}:\left[\left(2^{-3}\right)^{-1}\right]^2$

57. $\left[2^2:4^{-3}\right]^{-3}:\left[\left(\sqrt{8}\right)^2:4^{-3}\right]^2$

58. $\left(\dfrac{9^2\cdot(-1)^2\cdot(-4)^{-1}}{5\cdot 9^{-1}}\right)^3$

59. $\left(\dfrac{2^{-2}\cdot 3^{-9}\cdot 3^3}{9^{-3}\cdot 4^{-1}}\right)^{-9}$

60. $\left(\dfrac{9^{-2}\cdot(-1)^8\cdot(-1)^{-3}}{9^{-2}\cdot 2^{-3}}\right)^{-3}$

61. $\left(\dfrac{8^7\cdot 3^5\cdot(-4)^{-4}}{7^{-6}\cdot 2^{-5}}\right)^{-1}$

62. $\left(\dfrac{9^{-1}\cdot(-3)^4\cdot(-2)^{-2}}{5^2\cdot 8^{-2}}\right)^{-5}$

63. $\left(\dfrac{8^6\cdot(-4)^{-9}\cdot 5^9}{4^7\cdot 6^{-7}}\right)^{-2}$

Determinar el valor de la variable

64. $C=\dfrac{5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5}{5\cdot 5\cdot 5\cdot 5}$

65. $H=\dfrac{2^5 3^7 4^9}{4^8 2^3 3^6}$

66. $C=\dfrac{35^{19}\,(8\cdot 5)^{16}\,27^{13}}{(2\cdot 3\cdot 5)^{30}\,(5\cdot 9)^5\,14^{18}}$

67. $R=\dfrac{\left[\left(\left(3^2\right)^3\right)^4\right]^5 3^{6^3}}{3^{11^2}\left(3^{21}\right)^{10}}$

68. $L=3^{2^{2^{7^{0^{19}}}}}$

69. $W=\dfrac{\left(2^2\right)^4\left(2^5\right)^6 2^{20}}{\left(2^7\right)^8}$

70. $R=\dfrac{3^3 9^4}{27\cdot 81^2}$

71. $I=\dfrac{2^4 2^4 2^4 2^4 2^4 2^4}{2^8 2^8}$

72. $C=\dfrac{\left(2^5\right)^9\left(2^{-7}\right)^3}{\left(2^2\right)^8}$

73. $H=3^5 3^6 3^{-2}$

74. $V=\dfrac{6^4\cdot 4}{8\cdot 3^2}$

75. $A=\left\{\left[\left(\dfrac{3}{4}\right)^2\right]^3\right\}^4\cdot\left(-\frac{2}{7}\right)^2\cdot\left(-\frac{2}{7}\right)^{-5}$

76. $K=\dfrac{\frac{(2/3)^2\cdot(1/3)^{-3}\cdot 2^4\cdot 12^3\cdot 6^3}{3^2\cdot(2/4)^3\cdot\left(3^2\cdot 8^2\cdot 3^3\right)^{-1}}}{3^2\cdot\left(3/2^3\right)\cdot\left(2^{-1}/3^2\right)3^2}$

77. $F=\dfrac{\left(\frac{5}{3}\right)^{-2}\cdot 2\cdot 5^2\cdot 3^{-2}\cdot 5^{-5}}{\left(\frac{3}{5}\right)^2\cdot 7\cdot 5^3\cdot 5^{-3}\cdot\frac{3^3}{5^2}}$

78. $G=\left(\dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}}{\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{-1}{2}\right)^{-4}\left(\frac{1}{9}\right)^3}\right)$

79. $E=\dfrac{\frac{3^{-2}3^2 2^4}{2^3 2^{-2}3^4}\div\frac{2^4 2^{-1}2}{2^4 3^2 2}}{\frac{2^2 3}{2^4 3^{-2}}\div\frac{2^4 3^2}{2^3 2^4}}$

80. $Q=\dfrac{2^4 3^2 2^{-1}}{2^3 3^2 2^6 2}:\dfrac{2^4 3^{-2}4^2}{3^{-3}2^{-2}2}$

81. $S=\dfrac{\frac{3^2 2^{-1}}{3^6 2^{-2}3}\div\frac{2^4 3^{-2}4}{2^{-1}2^4 6^{-2}}}{\frac{2^7 3^2 18}{3^{-2}2^4 16}\div\frac{2^4 2^{-2}36}{2^4 18}}$

82. $A = \dfrac{\frac{\left(3^{-2}3^{4}\right)^{-1}}{\left(3^{2}3^{-1}\right)^{-2}} \cdot \frac{\left(2^{2}3^{-2}\right)^{-1}}{\left(3^{2}3^{3}\right)^{-2}}}{\frac{3^{4}3^{-1}2^{2}}{\left(2^{3}3^{2}2\right)^{2}} \cdot \frac{\left(3^{2}3\right)^{2}}{3^{3}2}}$

83. $P = \dfrac{\frac{\left(3^{-2}3^{4}\right)^{-1}}{\left(3^{2}3^{-1}\right)^{-2}} : \frac{\left(2^{2}3^{-2}\right)^{-1}}{\left(3^{2}3^{3}\right)^{-2}}}{\frac{3^{4}3^{-1}2^{2}}{\left(2^{3}3^{2}2\right)^{2}} : \frac{\left(3^{2}3\right)^{2}}{3^{3}2}}$

84. $R = \dfrac{3^{-2} \cdot 3^{4} \cdot 2^{6} \cdot 2}{3^{4} \cdot 2 \cdot 3^{-1} \cdot 27} : \dfrac{27 \cdot 2^{6} \cdot 3^{-2}}{15 \cdot \left(2^{-4}\right)^{2} 3^{-3}}$

85. $M = \dfrac{3^{2} \cdot 3^{-2} \cdot 2^{4}}{2^{2}3^{-2}2^{-3}} \cdot \dfrac{3^{2}2^{-9}2}{3^{2}2^{4}3^{-1}}$

86. $W = \dfrac{27 \cdot 2^{4} \cdot 81}{\left(3^{2}\right)^{-1} \cdot 2^{8} \cdot 9} : \dfrac{3^{4} \cdot 2^{2} \cdot \left(2^{2}\right)^{-2}}{2^{-2} \cdot 3^{-1}}$

Evaluar los siguientes polinomios aritméticos:

87. $(3+4)^2$

88. 3^2+4^2

89. $(5-3)^2$

90. 5^2-3^2

91. $\dfrac{2^4-2^3}{2^2}$

92. $3 \cdot 6^{-1} + 4 - 3 \div 2$

93. $\left(-2^3\right)^2 + \left(-2^2\right)^3$

94. $-2^3 + (-2)^3 + 2^3 - (-2)^3$

95. $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 - 16 \cdot 16 \cdot 16$

96. $-2^4 + (-2)^4 + 2^4 - (-2)^4$

97. $0^7 + 7^0 + (-5)^0 + 1^6 + (-6)^1$

98. $\left(\dfrac{-1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{4}{3}\right)^2$

99. $\left(3\dfrac{3}{5} - 2\dfrac{1}{2}\right)^2$

100. $3^{2^0} + 5^{2^{3^0}} + 5^{25^0}$

101. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1} + \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2} - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3}$

102. $-\left(\dfrac{2}{3}\right)^3 + \left(-\dfrac{2}{3}\right)^3 + \left(\dfrac{2}{3}\right)^3 - \left(-\dfrac{2}{3}\right)^3$

103. $\left[2^{-1} + 3^{-1}\right]^{-1}$

104. $\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} - \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}}{\left(\frac{4}{3}\right)^{2}}$

105. $\dfrac{2^0 + 3^{-1}}{3}$

106. $\dfrac{3^0 + 4^{-2}}{\left(1 + 2^{-1}\right)^3}$

107. $\dfrac{5}{3}\left(\dfrac{2}{5} + \dfrac{7}{2}\right) + 2^{-1} \cdot 4 - 3$

108. $[(-2+3) \cdot (-3)]^2 : (-6+3)$

109. $[(-6+7-15) : (-7)]^3 - [-3 \cdot (-3)]$

110. $[49 : (24-35+4)]^2 + [-36 - (-10-21)]^3$

111. $\dfrac{2^8 + 2^{10} + 2^9}{2^3 2^2 2^3}$

112. $\dfrac{2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4}{2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4}}$

113. $3^2 + \left(3^2\right)^3 - 27^2 + \left(\dfrac{1}{5}\right)^{-1}$

114. $\dfrac{\left(-\frac{1}{3}\right)^3 + 2^{-1} + 3^0}{\sqrt{\frac{16}{81}}}$

115. $\left[\dfrac{(-3)^3 + 6^0}{3^3 + (-1)^2}\right] \div \left[|10-15| - (-1)^{-2}\right]$

116. $\left[\left(\dfrac{3}{2}\right)^0 + \dfrac{2^{28}}{2^{26}} - 2 \cdot 3^2\right]^2$

117. $\left[2\,(3-4+6-4)^7 - \left(\dfrac{2^3 - 3^{-2}}{3^4}\right)^2\right]^0$

118. $\dfrac{\frac{1}{7} + \frac{3}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{2}{7} - \left(-\frac{1}{2}\right)^3} \div \dfrac{\frac{1}{4} + \frac{9}{2}}{2}$

Expresar como potencia de una única base, así ésta no sea un número primo.

119. $3^5 \cdot 3^3 \cdot 3$

120. $(-5)^7 : (-5)^2$

121. $\left[(-4)^2\right]^3$

122. $\left[(-7)^{-2}\right]^3$

123. $(-2)^5 \cdot (-2)^0 \cdot (-2)^{-3} \cdot (-2)$

124. $6^2 \cdot (-2)^2 \cdot 3^2$

125. $2^4 \cdot 2 \cdot 8$

126. $(-4)^3 \cdot (-4)^5 \cdot 16$

127. $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \cdot \frac{1}{16}$

128. $\left(\frac{2}{3}\right)^5 \left(\frac{3}{4}\right)^5$

129. $2^{-4} 2^7 5^3$

130. $\left(\frac{6}{5}\right)^{-2} : \left(\frac{3}{10}\right)^{-2}$

131. $(-7)^{-2} (-7)^3 (-7)^0$

132. $8^3 (-2)^3$

133. $(-3)^{-2} : (-3)^3$

134. $\frac{2^2}{2^{-1}} \cdot \left(\frac{2^3 \cdot (-2)^6}{2^5 \cdot 2^{-2}}\right)^2$

135. $\left(\frac{(-3)^2\, 3^3\, (-3)}{3^3 \cdot 3^{-1}}\right)^2$

136. $\left(\frac{5^2 \cdot 5^{-3}}{5^{-2} \cdot 5^3}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{5^2 \cdot 5^3}{5 \cdot 5^2}\right)^2$

137. $\dfrac{\frac{54^2 \cdot 18^3 \cdot 27^{-2} \cdot (3^{-2})^2}{3^3 \cdot 27^{-3} \cdot 24^{-2} \cdot 2^2}}{3^{-3} \cdot 2^4 \cdot 2^3 \cdot 16^{-1} \cdot 18^2 \cdot 24^{-1}}$

Resolver los siguientes problemas.

138. España tiene una población de $36,6 \cdot 10^6$ habitantes y una superficie de $50,4 \cdot 10^4 km^2$. ¿Cuál será la densidad de la población española? ($Densidad = hab/superficie$)

139. La masa de la tierra es $5,98 \cdot 10^{24} kg$. ¿Cuál sería la masa equivalente a 3 planetas iguales a la tierra?

140. Un lavavajillas dispone de 8 bandejas y en cada una de ellas caben 32 vasos. ¿Cuántos vasos se podrán lavar de una sola vez? Expresa el resultado en forma de potencia.

141. La edad de Marcos es 14 años. ¿Cuál es el cuadrado del doble de su edad dentro de 2 años? Expresa el resultado en forma de potencia.

142. ¿Cuál es el cubo del cociente que resulta de dividir 128 entre 32? Expresa las operaciones y el resultado en forma de potencia.

2.5 Respuestas a los ejercicios del capítulo.

1. 81
2. 729
3. 25
4. 125
5. 16
6. 64
7. 144
8. 1
9. 49
10. 343
11. 676
12. 289
13. 121
14. 841
15. 121
16. 484
17. 1089
18. 441
19. 361
20. $\frac{1}{4}$
21. 11
22. 3
23. 2
24. 3
25. 2
26. 3
27. 2
28. 3
29. 2
30. 3
31. 2
32. 2
33. 2

34. 2
35. 2
36. 2
37. 2
38. 2
39. 2
40. 3
41. 5
42. 5
43. 8
44. 8
45. 7
46. 7
47. 2
48. 2
49. 10
50. 10
51. 19
52. 33
53. 30
54. 12
55. 17
56. 32
57. 30
58. 11
59. 27
60. $\frac{1}{2}$

Respuestas ejercicio 2.2

1. -2^7
2. 1
3. -1
4. 3^4
5. 2^2
6. 4^{14}
7. $\dfrac{1}{3^2}$
8. -1
9. 1
10. 2^{14}
11. 2^{10}
12. 1
13. 2^6
14. $\dfrac{1}{4^5}$
15. $\dfrac{1}{5^3}$
16. $\dfrac{1}{5^6}$
17. 1
18. 5
19. -2
20. -1
21. 1
22. -35
23. $\dfrac{1}{11^6}$
24. 5^7
25. $\dfrac{1}{5}$
26. 5^{12}
27. $\dfrac{2^5\cdot 5^2}{3^7\cdot 7^5}$
28. $\dfrac{7^{12}}{3^7\cdot 5}$
29. $\dfrac{2^{17}\cdot 5^2}{3^2}$
30. $\dfrac{3^2}{2^5\cdot 5^7\cdot 7}$
31. $\dfrac{3^8}{2^8\cdot 5}$
32. $2^8\cdot 3^6\cdot 7^5$
33. $\dfrac{2^{10}\cdot 3^8}{5^3\cdot 7^2}$
34. $\dfrac{5^6\cdot 7^6}{2^{14}\cdot 3^{27}}$
35. $\dfrac{3^8\cdot 7^5}{2^{10}}$
36. $\dfrac{3^7}{2^9\cdot 7^8}$
37. $-\dfrac{3^{13}\cdot 5^3}{2^9}$
38. $\dfrac{3^{20}}{2^{27}}$
39. $-\dfrac{2^6}{3^4\cdot 5^6\cdot 7^2}$
40. $-\dfrac{1}{2^7\cdot 5^3}$
41. $-\dfrac{2^{15}\cdot 5^5}{3^6}$
42. $-\dfrac{1}{2^2\cdot 5}$

Respuestas ejercicio 2.3

1. 2
2. 3
3. 2
4. 3
5. 5
6. 7
7. 3
8. 2
9. 2

10. 5
11. 8
12. 48
13. 35
14. $\frac{2}{\sqrt{2}}$
15. $-\frac{1}{\sqrt{5}}$
16. $(-7)(-7)(-7)$
17. $(-2)(-2)(-2)(-2)(-2)\cdot 3\cdot 3$
18. $4^{-1}\cdot 4^{-1}\cdot 4^{-1}=\frac{1}{4\cdot 4\cdot 4}$
19. $-3\cdot 3\cdot 3$
20. $-5^{-1}\cdot 5^{-1}\cdot 5^{-1}$
21. $(-1)^{-1}\cdot(-1)^{-1}\cdot(-1)^{-1}\cdot(-1)^{-1}$
22. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$
23. $\left(\frac{-1}{5}\right)\cdot\left(\frac{-1}{5}\right)\cdot\left(\frac{-1}{5}\right)$
24. $\frac{5}{3}$
25. -2
26. 12
27. -1
28. $\frac{4}{3}$
29. -2
30. -3
31. 4
32. $\frac{1}{3}$
33. $\frac{7}{8}$
34. $\frac{9}{4}$
35. 1
36. 1
37. $-\frac{8}{27}$
38. $\frac{64}{729}$
39. $\frac{49}{4}$
40. $\frac{2^6}{5^6}$
41. $\frac{2^9}{5^9}$
42. $\frac{1}{64}$
43. 2^{36}
44. $\frac{1}{5^8}$
45. -5^{10}
46. 1
47. -2^5
48. $\frac{1}{15^{12}}$
49. 1
50. 9
51. 2^{120}
52. 4^{10}
53. -3^{27}
54. $\frac{1}{2^4\cdot 3^8\cdot 5^8}$
55. 2^4
56. 2^{-30}
57. 2^{-42}
58. $-\frac{3^{18}}{2^6\cdot 5^3}$
59. 1
60. $-\frac{1}{2^9}$
61. $\frac{1}{2^{18}\cdot 3^5\cdot 7^6}$
62. $\frac{5^{10}}{2^{20}\cdot 3^{10}}$
63. $\frac{2^{14}}{3^{14}\cdot 5^{18}}$
64. 25
65. 48
66. $\frac{7}{3}$
67. 3^5
68. 81
69. 4
70. 1
71. 2^8
72. 2^8
73. 3^9
74. 72
75. $\left(\frac{3}{4}\right)^{24}\cdot\left(-\frac{2}{7}\right)^{-3}$
76. $2^{28}3^7$
77. $\frac{2}{3^5\cdot 5\cdot 7}$
78. $2^5\cdot 3^5$
79. $\frac{2^3}{3^3}$
80. $\frac{1}{2^{16}3}$
81. $\frac{1}{2^5}3^{11}$
82. $3^{10}2^5$
83. $\frac{2^7}{3^8}$
84. $\frac{5}{3^5 2^8}$
85. $\frac{3^3}{2^7}$
86. $\frac{3^2}{2^4}$
87. 7^2

88. 5^2
89. 2^2
90. 4^2
91. 2
92. 3
93. 0
94. 0
95. 0
96. 0
97. -3
98. $\dfrac{73}{36}$
99. $\dfrac{16}{25}$
100. 33
101. -15
102. 0
103. $\frac{6}{5}$
104. $-\frac{9}{2}$
105. $\frac{4}{9}$
106. $\frac{17}{54}$
107. $\frac{11}{2}$
108. -2
109. -1
110. -76
111. 7
112. 32
113. 14
114. $\frac{79}{24}$
115. $-\frac{13}{56}$
116. 169
117. 1
118. $\frac{288}{475}$
119. 3^9
120. $(-5)^5$
121. $(-4)^6$
122. $(-7)^{-6}$
123. $(-2)^3$
124. 6^4
125. 2^8
126. $(-4)^{10}$
127. $\left(\frac{1}{2}\right)^3$
128. $\left(\frac{1}{2}\right)^5$
129. 10^3
130. 4^{-2}
131. -7
132. $(-16)^3$
133. $(-3)^{-5}$
134. 2^{15}
135. 3^8
136. 5^6
137. 6^7
138. $7{,}26 hab/km^2$
139. $17{,}94 \cdot 10^{24} kg$
140. 2^8 vasos
141. 2^{10}
142. 2^6

3 Radicación

3.1 Radicación

Con anterioridad se ha hecho énfasis en la definición de las operaciones aritméticas y la radicación es una operación que se define en términos de la potenciación, lo cual significa que para poder determinar raíces de números reales sin calculadora, hay que dominar la potenciación. Potenciación y radicación son operaciones que guardan relación con la multiplicación y en este sentido se debe insistir que para efectuar estas operaciones hay que dominar la multiplicación y con ello las *tablas de multiplicar*.

Definición 3.1 Radicación

Sean a, b reales y n un $\mathbb{Z}^+$, se define $\sqrt[n]{a}$ así

$$\sqrt[n]{a} = b \text{ si y solamente si } b^n = a$$

a es el radicando, n el índice y b la raíz

Observese que la radicación es una operación en la que se busca una base b (llamada raíz) tal que al aplicarle el exponente n de como resultado a, es así como la radicación es una potenciación en la que se desconoce la base.

Ejemplo 3.1 –Cálculo de una raíz con dos soluciones

Calcular $\sqrt{4}$
Se busca un número b tal que b^2 sea 4; hay dos opciones para b y son 2 y -2.

Siempre hay forma de verificar si el número hallado cumple con el cálculo realizado, en efecto veamos que $2^2 = 4$ y también $(-2)^2 = 4$. La forma de presentar la respuesta puede ser escribiendo $\sqrt{4} = \pm 2$, o se puede formular por separado que $\sqrt{4} = 2$ y $\sqrt{4} = -2$.

Ejemplo 3.2 –Cálculo de una raíz con única solución

Calcular $\sqrt[3]{-8}$
Se busca un número b tal que b^3 sea -8; hay sólo una opción para b y es -2, es decir $\sqrt[3]{-8} = -2$.

La solución de un raíz puede ser exacta, siempre que el radicando sea una potencia cuadrada o cúbica, como en los dos ejemplos anteriores; pero existen ejercicios de radicación en los cuales el valor de la raíz es un decimal infinito y para su calculo debemos recurrir a dispositivos como calculadoras o computadores.

Ejemplo 3.3 –Cálculo de una raíz inexacta

Calcular $\sqrt[2]{5}$
Se busca un número b de forma que b^2 sea 5; de la potenciación sabemos que $2^2 = 4$ y $3^2 = 9$, así que la raíz debe ser un número entre 2 y 3, lo cual significa que no es un entero.
El cálculo que se muestra a continuación fue realizado en el sistema en línea Wolfram Alpha.

$$\sqrt[2]{5} = 2{,}236067977499789696409173668731276235440618359611525724270897...$$

No se pretende dejar la idea que una raíz es inexacta cuando su solución no es entera, así por ejemplo $\sqrt{\frac{1}{4}}$ es $\frac{1}{2}$, que es un valor exacto y no es un entero, pero tampoco es una aproximación como la raíz calculada en el ejemplo anterior.

En matemáticas se privilegia la exactitud en los cálculos sobre las aproximaciones, motivo por el cual todas las raíces inexactas se operan en su forma más simple y sólo se recurre a una aproximación de ellas en casos muy especiales de las aplicaciones en la solución de problemas.

Ejemplo 3.4 –Cálculo de una raíz sin solución real

Calcular $\sqrt{-4}$
Se busca un número b tal que b^2 sea -4; habría dos opciones para b y son 2 y -2, sin embargo, nótese que tanto 2^2 como $(-2)^2$ no es -4 sino 4; así que se concluye que $\sqrt{-4}$ no existe en los reales

La radicación es una operación que no cumple con la propiedad clausurativa, que sí se cumple en la adición y multiplicación; así que se puede concluir que no siempre es posible determinar la raíz de un número real. Este hecho es de suma importancia, toda vez que en álgebra y cálculo esta idea se emplea con mucha frecuencia al determinar el dominio de una función o la naturaleza de las soluciones de una ecuación.

Definición 3.2 Alternativa de radicación como una potencia

Sean a y m reales; y n $\mathbb{Z}^+$, se define $\sqrt[n]{a^m}$ así

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \text{ siempre que } \sqrt[n]{a^m} \text{ exista}$$

a es el radicando, n el índice y m el exponente del radicando

Se presenta un ejemplo del uso de la definición alternativa de radicación como una potencia, en función del cálculo de raíces.

Ejemplo 3.5 –Uso de la definición alternativa de la radicación

Calcular el valor de $\sqrt{25}$

$\sqrt{25}$	Ejercicios dado
$\sqrt{5^2}$	Se descompone el radicando, es decir $25 = 5^2$
$5^{\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}}$	Se aplica la definición alternativa de radicación
5	Se obtiene este resultado luego de simplificar el exponente

En la práctica, el cálculo de la raíz planteada se efectúa así: $\sqrt[2]{25} = \sqrt[\cancel{2}]{5^{\cancel{2}}} = 5$, pero la utilidad de la definición alternativa de la radicación se evidencia en un cálculo como el que sigue.

Ejemplo 3.6 –Uso de la definición alternativa de la radicación

Calcular el valor de $\sqrt{625}$

$\sqrt{625}$	Ejercicio dado
$\sqrt{5^4}$	Se descompone el radicando, es decir $625 = 5^4$
$\sqrt[\cancel{2}]{5^{\cancel{4}}}$	Se aplica la definición alternativa de radicación
5^2	Se obtiene este resultado luego de simplificar $\frac{4}{2}$
25	Se efectúa la potenciación

Nótese que se aplicó la definición alternativa de la radicación, aunque no se escribió de forma explicita en el proceso de cálculo del ejercicio dado, pero, en todo caso, la práctica en matemáticas es fundamental a la hora de dominar las definiciones y propiedades a emplear en las operaciones aritméticas en función de la eficiencia o rapidez al momento de realizar los procedimientos pedidos.

Aplicación del concepto de radicación

Ejercicio 3.1

Cálculo de raíz, índice y radicando

Usar la definición de radicación para calcular las siguientes raíces.

1. $\sqrt{81}$
2. $\sqrt{25}$
3. $\sqrt{16}$
4. $\sqrt{1}$
5. $\sqrt{49}$
6. $\sqrt{676}$
7. $\sqrt{289}$
8. $\sqrt{121}$
9. $\sqrt{841}$
10. $\sqrt{121}$
11. $\sqrt{484}$
12. $\sqrt{1089}$
13. $\sqrt{441}$
14. $\sqrt{361}$
15. $\sqrt[3]{729}$
16. $\sqrt[3]{125}$
17. $\sqrt[3]{64}$
18. $\sqrt[3]{1}$
19. $\sqrt[3]{343}$
20. $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$

Cuál es el índice con el cual se cumple cada una de las siguientes igualdades.

21. $\sqrt[x]{81} = 9$
22. $\sqrt[x]{729} = 9$
23. $\sqrt[x]{36} = 6$
24. $\sqrt[x]{216} = 6$
25. $\sqrt[x]{25} = 5$
26. $\sqrt[x]{125} = 5$
27. $\sqrt[x]{4} = 2$
28. $\sqrt[x]{8} = 2$
29. $\sqrt[x]{25} = 5$
30. $\sqrt[x]{125} = 5$
31. $\sqrt[x]{1089} = 33$
32. $\sqrt[x]{1156} = 34$
33. $\sqrt[x]{484} = 22$
34. $\sqrt[x]{225} = 15$
35. $\sqrt[x]{324} = 18$
36. $\sqrt[x]{625} = 25$
37. $\sqrt[x]{256} = 16$
38. $\sqrt[x]{196} = 14$
39. $\sqrt[x]{676} = 26$
40. $\sqrt[x]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$

Con qué radicando se cumple la igualdad.

41. $\sqrt{x}=5$	45. $\sqrt{x}=1$	49. $\sqrt{x}=3$	53. $\sqrt{x}=28$	57. $\sqrt{x}=22$
42. $\sqrt[3]{x}=5$	46. $\sqrt[3]{x}=1$	50. $\sqrt[3]{x}=3$	54. $\sqrt{x}=15$	58. $\sqrt{x}=26$
43. $\sqrt{x}=2$	47. $\sqrt{x}=0$	51. $\sqrt{x}=13$	55. $\sqrt{x}=29$	59. $\sqrt{x}=19$
44. $\sqrt[3]{x}=2$	48. $\sqrt[3]{x}=0$	52. $\sqrt{x}=15$	56. $\sqrt{x}=12$	60. $\sqrt{x}=\frac{1}{5}$

3.2 Leyes de la radicación

En razón a que no todas las raíces de números reales son exactas y que con frecuencia se debe hacer cálculos que involucran varios radicales, lo que resta del capítulo estará dedicado a las propiedades de la radicación que van a ser muy útiles para efectuar operaciones entre radicales, conservando la exactitud en los cálculos.

Propiedad 3.1 Potencia de una raíz

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a \text{ siempre que } \sqrt[n]{a} \text{ exista}$$

Ejemplo 3.7 –Simplificación de potencia de una raíz

Uso *Correcto*	Uso *Incorrecto*
Calcular $\left(\sqrt{49}\right)^2$	Calcular $\left(\sqrt{-4}\right)^2$
$\left(\sqrt[\not{2}]{49}\right)^{\not{2}}$	$\left(\sqrt[\not{2}]{-4}\right)^{\not{2}}$
49	-4

En el caso $\left(\sqrt{-4}\right)^2$, es incorrecto ya que $\sqrt{-4}$ no existe, como lo exige la propiedad.

Propiedad 3.2
Raíz de una potencia
Para simplificar $\sqrt[n]{a^n}$ se deben considerar dos posibilidades.

1). Índice n par	2). Índice n impar
$\sqrt[n]{a^n} = \lvert a\rvert$	$\sqrt[n]{a^n} = a$

El ejemplo que sigue presenta tres opciones en las cuales hay que aplicar la propiedad a fin de obtener la simplificación.

Ejemplo 3.8 –Simplificación de raíz de una potencia

Efectuar cada una de las siguientes operaciones:

$\sqrt[4]{5^4}$	$\sqrt[4]{(-4)^4}$	$\sqrt[3]{2^3}$	$\sqrt[3]{(-3)^3}$
$\lvert 5\rvert$	$\lvert -4\rvert$	2	-3
5	4	2	-3

Hasta el momento se ha visto cómo calcular raíces de números reales sin el uso de la calculadora. En síntesis, se puede decir que hay raíces exactas e inexactas y, raíces de índice par e impar. Una raíz de índice par tiene dos

respuestas, pero no existen raíces de índice par de números reales negativos. En contraste con lo anterior las raíces de índice impar sólo tienen una respuesta, y siempre va a existir la raíz con índice impar de cualquier número real.

En lo sucesivo se considera sólo la solución positiva de las raíces de índice par de números reales positivos.[1]

3.3 Simplificación de un radical

Se ha efectuado el cálculo de radicales cuya raíz es exacta. Hay radicales cuya raíz no es exacta, pero a fin de realizar ciertas operaciones, es posible expresarlos de forma simplificada. En las propiedades que siguen se suponen que todas las raíces existen.

Propiedad 3.3 Raíz de un producto

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

La raíz de un producto es igual al producto de las raíces

Ejemplo 3.9 –Simplificación de un radical

Simplificar $\sqrt{20}$

$\sqrt{20}$	Ejercicio dado
$\sqrt{2^2 \cdot 5}$	Se descompone en factores primos el radicando 20
$\sqrt{2^2}\sqrt{5}$	Se aplica la propiedad raíz de un producto
$\sqrt[\not{2}]{2^{\not{2}}}\sqrt{5}$	Se aplica la propiedad raíz de una potencia
$2\sqrt{5}$	Resultado

El uso de las leyes de la multiplicación es fundamental para realizar cálculos de simplificación. El ejercicio siguiente muestra la necesidad de aplicar la propiedad disociativa de la multiplicación para expresar la potencia 2^3 como $2^2 \cdot 2$.

Ejemplo 3.10 –Simplificación de un radical

Simplificar $\sqrt{72}$

$\sqrt{72}$	Ejercicio dado
$\sqrt{2^3 \cdot 3^2}$	Se descompone en factores primos el radicando 72
$\sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot 3^2}$	Se disocia convenientemente 2^3 en dos potencias de forma que una de ellas sea un cuadradro perfecto como es 2^2
$\sqrt{2^2}\sqrt{2}\sqrt{3^2}$	Se aplica la propiedad raíz de un producto
$\sqrt[\not{2}]{2^{\not{2}}}\sqrt[\not{2}]{3^{\not{2}}}\sqrt{2}$	Se aplica la propiedad raíz de una potencia
$2 \cdot 3\sqrt{2}$	Se efectúa el producto de las dos raíces obtenidas
$6\sqrt{2}$	Resultado

[1] Se consideran las dos soluciones de una raíz de índice par de un número real, cuando son el resultado del cálculo de la solución de una ecuación.

Las propiedades de las operaciones entre números reales se aplican en cualquier sentido, es decir, en el ejemplo anterior se aplicó la propiedad 3.3 de derecha a izquierda, expresando la raíz de un producto como el producto de dos raíces. Cuando se realiza una simplificación puede ser conveniente usar las propiedades en el otro sentido, en este caso específico se presenta un ejemplo en el cual es más útil expresar el producto de dos raíces como la raíz del producto de sus radicandos.

Ejemplo 3.11 –Simplificación de un producto de radicales

Simplificar $\sqrt{6}\sqrt{30}$

$\sqrt{6}\sqrt{30}$	Ejercicio dado
$\sqrt{6}\sqrt{30} = \sqrt{6 \cdot 30}$	Se aplica la propiedad raíz de un producto
$\sqrt{180}$	Se multiplica 6 por 30
$\sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5}$	Se descompone en factores primos el radicando 180
$\sqrt[\not{2}]{2^{\not{2}}}\sqrt[\not{2}]{3^{\not{2}}}\sqrt{5}$	Se aplican las propiedades raíz de un producto y raíz de una potencia
$2 \cdot 3\sqrt{5}$	Se efectúa el producto de las dos raíces obtenidas
$6\sqrt{5}$	Resultado

El ejemplo presenta un ejercicio en el cual se aplica una misma propiedad en distinto sentido con el objeto de obtener la simplificación de la operación.

Propiedad 3.4 Raíz de un cociente

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

La raíz de un cociente es igual al cociente de las raíces

Ejemplo 3.12 –Simplificación de un radical

Simplificar $\sqrt{\frac{50}{121}}$

$\sqrt{\frac{50}{121}}$	Ejercicio dado
$\sqrt{\frac{5^2 \cdot 2}{11^2}}$	Se descompone en factores primos el radicando $\frac{50}{121}$
$\frac{\sqrt[\not{2}]{5^{\not{2}}}\sqrt{2}}{\sqrt[\not{2}]{11^{\not{2}}}}$	Se aplican las propiedades raíz de un cociente, de un producto y de una potencia
$\frac{5\sqrt{2}}{11}$	Resultado

Se muestra ahora un ejemplo donde la simplificación se logra cuando aplicamos la propiedad Raíz de un cociente en sentido contrario a lo presentado en el ejemplo precedente.

Ejemplo 3.13 –Simplificación de un radical

Simplificar $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$

$\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$ Ejercicio dado

$\sqrt{\dfrac{18}{2}}$ Se aplica la propiedad raíz de un cociente

$\sqrt{9}$ Se simplifica la fracción $\dfrac{18}{2}$

3 Resultado

Otra forma de realizar este ejercicio es descomponiendo 18 como $3^2 \cdot 2$, luego simplificando $\sqrt{3^2 \cdot 2}$ a $3\sqrt{2}$, con lo cual se obtiene $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ y al simplificar el factor común $\sqrt{2}$ se logra llegar al mismo resultado 3.

Las propiedades o leyes de la radicación ofrecen una variedad de caminos posibles, según se opte por la aplicación de una u otra propiedad al momento de simplificar una expresión, sólo la práctica permitirá saber cuál es el camino más *económico* y *simple* posible al momento de realizar una cierta simplificación.

Propiedad 3.5 Raíz de una raíz

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

La raíz de raíz de a es igual a la raíz de a con índice igual al producto de los índices n y m

Ejemplo 3.14 –Simplificación de un radical

Simplificar $\sqrt[2]{\sqrt[3]{64}}$

$\sqrt[2]{\sqrt[3]{64}}$ Ejercicio dado

$\sqrt[6]{64}$ Se aplica la propiedad raíz de una raíz

$\sqrt[6]{2^6}$ Se descompone en factores primos el radicando 64

$\sqrt[\not{6}]{2^{\not{6}}}$ Se aplica la propiedad raíz de una potencia

2 Resultado

La propiedad anterior permite expresar como un solo radical la raíz de una raíz de diferente índice; ocasionalmente se requiere expresar o simplificar como un solo radical el producto de dos radicales de diferente índice.

Ejemplo 3.15 –Simplificación de un radical

Simplificar a un sólo radical $\sqrt{2}\sqrt[3]{5}$

$\sqrt[2]{2}\sqrt[3]{5}$	Ejercicio dado
$\sqrt[6]{2^3}\sqrt[6]{5^2}$	Definición alternativa de un radical
$\sqrt[6]{2^3 \cdot 5^2}$	Se aplica la propiedad raíz de un producto
$\sqrt[6]{200}$	Resultado, luego de efectuar las operaciones indicadas

En el paso dos del ejemplo, la definición alternativa de un radical se aplicó en este sentido. Lo primero es ver que el MCM entre 2 y 3 es 6, por lo cual para poder representar los dos radicales en uno solo, deben tener el mismo índice, el cual es 6. Ahora, se tiene el radical $\sqrt[2]{2}$, que expresado según esta definición es $2^{1/2}$; se necesita que el denominador sea 6, así que se amplifica la fracción $1/2$, multiplicando por 3 tanto el numerador como el denominador, obteniendo $2^{3/6}$ que expresado nuevamente como un radical es $\sqrt[6]{2^3}$. Se deja al lector el análisis del otro radical.

3.4 Simplificación de cocientes y productos de radicales

Las propiedades de la radicación se pueden emplear convenientemente al momento de efectuar operaciones indicadas de radicación, los ejemplos que siguen ilustran esta idea.

Ejemplo 3.16 -Simplificación de un cociente de radicales

Simplificar $\dfrac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}}$

$\dfrac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}}$	Ejercicio dado
$\sqrt{\dfrac{32}{2}}$	Raíz de un cociente
$\sqrt{16}$	Se simplifican las fracciones
$\sqrt[\not{2}]{4^{\not{2}}}$	Se descompone en factores
4	Raíz de una potencia

Ejemplo 3.17 -Simplificación de un producto de radicales

Evaluar $\sqrt{\frac{2}{25}}\sqrt{2}$

$\sqrt{\frac{2}{25}}\sqrt{2}$	Ejercicio dado
$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{25}}\frac{\sqrt{2}}{1}$	Raíz de un cociente
$\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}}$	Se efectúa el producto de fracciones y se aplica raíz de un producto en el numerador
$\frac{2}{5}$	Se calculan las raíces de 4 y 25

3.5 Simplificación de potencias y radicales

Es frecuente hallar ejercicios en los cuales están indicadas operaciones de potenciación, radicación, adiciones y sustracciones y, como de costumbre, se van efectuando las operaciones más internas como lo presenta el ejercicio siguiente.

Ejemplo 3.18 -Simplificación de una expresión con radicales

Simplificar $\sqrt{\sqrt{4}^2+\sqrt{9}^2+2\sqrt{36}-\sqrt{27\cdot 3}}$

$\sqrt{\sqrt{4}^2+\sqrt{9}^2+2\sqrt{36}-\sqrt{27\cdot 3}}$	Ejercicio dado
$\sqrt{\sqrt{4}^2+\sqrt{9}^2+2\sqrt{36}-\sqrt{81}}$	Se efectua el producto $27\cdot 3$
$\sqrt{\sqrt{4}^2+\sqrt{9}^2+2\sqrt{6^2}-\sqrt{9^2}}$	Se descomponen los números 36 y 81
$\sqrt{4+9+2\cdot 6-9}$	Se aplica raíz de una potencia
$\sqrt{16}$	Se simplifica el radicando, efectuando las operaciones indicadas
4	Se halla la raíz de 16

La práctica va permitiendo realizar, de forma conveniente, ciertas operaciones; nótese cómo en los ejercicios anteriores se ha descompuesto en factores, no primos, números como $81=9^2$, esto con el objetivo de aplicar la propiedad de raíz de una potencia de forma más inmediata, ya que si se descompone como $81=3^4$, no es tan inmediato que se simplifica el índice del radical con el exponente, aunque en últimas se llegaría al mismo resultado.

3.6 Polinomios aritméticos con potencias y radicales

En esta sección se presentan varios ejemplos en los cuales se debe simplificar una expresión que contiene operaciones indicadas de radicación, potenciación, adiciones y sustracciones.

Ejemplo 3.19

Simplificar $\frac{2\sqrt{9}+2\sqrt{16}}{\sqrt{4}}-\sqrt{36}-\frac{2^3\cdot 3^2\cdot 4^2\cdot 5^3}{9\cdot 16\cdot 4\cdot 25}\div\frac{2-\frac{4}{7}}{-3}$

Cuando se tiene una expresión con diversas operaciones indicadas, es conveniente dividirla en varios

bloques; el ejercicio en cuestión se ha dividido en tres.

$$\boxed{\frac{2\sqrt{9}+2\sqrt{16}}{\sqrt{4}}-\sqrt{36}} \; - \; \boxed{\frac{2^3\cdot 3^2\cdot 4^2\cdot 5^3}{9\cdot 16\cdot 4\cdot 25}} \; \div \; \boxed{\frac{2-\frac{4}{7}}{-3}}$$

$1-10\div\frac{-10}{21}$	Se reemplaza cada bloque con su respectivo valor
$1-(-21)$	Se calcula la división $10\div(-10)/21$
22	Valor final luego de simplificar

Mostramos a continuación el proceso de la simplificación de cada uno de los bloques.

$\frac{2\sqrt{9}+2\sqrt{16}}{\sqrt{4}}-\sqrt{36}$	Primer bloque
$\frac{2\cdot 3+2\cdot 4}{2}-6$	Se calculan las raíces
$\frac{6+8}{2}-6$	Se efectuan los productos
$\frac{14}{2}-6$	Se simplifica la adición
$7-6$	Se simplifica la fracción
1	Resultado de la diferencia

$\frac{2^3\cdot 3^2\cdot 4^2\cdot 5^3}{9\cdot 16\cdot 4\cdot 25}$	Segundo bloque
$\frac{\cancel{2}^{\cancel{3}}\cdot\cancel{3}^{\cancel{2}}\cdot\cancel{4}^{\cancel{2}}\cdot\cancel{5}^{\cancel{3}}}{\cancel{3}^{\cancel{2}}\cdot\cancel{4}^{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}^{\cancel{2}}\cdot\cancel{5}^{\cancel{2}}}$	Se descompone en factores de forma conveniente
10	Se simplifica factores comunes a numerador y denominador

Note que el 16 se ha podido descomponer como 2^4, pero resulta mucho más conveniente hacerlo como 4^2, ya que en el numerador hay otro factor idéntico que se puede simplificar.

$\frac{2-\frac{4}{7}}{-3}$	Tercer bloque
$\frac{\frac{2\cdot 7-4\cdot 1}{7}}{-3}$	Se calcula la suma de las fracciones en el numerador
$\frac{\frac{10}{7}}{\frac{-3}{1}}$	Se efectuan las operaciones indicadas
$-\frac{10}{21}$	Se calcula la división de las fracciones

3.7 Racionalización

La racionalización es un procedimiento que consiste en determinar una expresión, equivalente pero en la cual el radical aparezca en el numerador.[2]

[2]En cálculo diferencial se suele emplear la racionalización pero para eliminar el radical del numerador

Procedimiento 3.1 Racionalización de un radical de índice dos.
Para racionalizar una expresión de la forma $\frac{b}{\sqrt{a}}$ se amplifica la fracción multiplicándola por $\sqrt{a}$, así

$$\frac{b}{\sqrt{a}} = \frac{b\cdot\sqrt{a}}{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}} = \frac{b\cdot\sqrt{a}}{\sqrt{a}^2} = \frac{b\cdot\sqrt{a}}{a}$$

El objetivo al amplificar la fracción multiplicándola por $\sqrt{a}$ es aplicar la propiedad de los radicales 3.1 en el denominador y así poder eliminar el radical del mismo.

Ejemplo 3.20 –Racionalizar un denominador

Racionalizar $\frac{2}{\sqrt{3}}$

$\frac{2}{\sqrt{3}}$	Ejercicio dado
$\frac{2\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}$	Se amplifica la fracción multiplicando por $\sqrt{3}$
$\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}$	Se simplifica aplicando la propiedad (3.1) de la radicación

Ejemplo 3.21 –Racionalizar un denominador

Racionalizar $\frac{8}{3\sqrt{2}}$

$\frac{8}{3\sqrt{2}}$	Ejercicio dado
$\frac{8\cdot\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}$	Se amplifica la fracción multiplicando por $\sqrt{2}$
$\frac{8\cdot\sqrt{2}}{(3)\cdot(2)}$	Se simplifica aplicando la propiedad (3.1) de la radicación
$\frac{4\cdot\sqrt{2}}{3}$	Se simplifica por el factor común 2

Procedimiento 3.2 Racionalización de un radical con índice mayor a dos
Para racionalizar una expresión de la forma $\frac{b}{\sqrt[n]{a^m}}$ con $n \neq 2$ se amplifica la fracción multiplicándola por $\sqrt[n]{a^p}$, así

$$\frac{b}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{b\cdot\sqrt[n]{a^p}}{\sqrt[n]{a^m}\cdot\sqrt[n]{a^p}} = \frac{b\cdot\sqrt[n]{a^p}}{a} \text{ siempre que } m+p=n$$

Significa que en este caso hay que tener en cuenta el exponente que tiene el radicando, para poder multiplicar por una potencia conveniente; veamos un ejemplo:

Ejemplo 3.22 –Racionalizar un denominador.

Racionalizar $\frac{5}{\sqrt[3]{3}}$

$\frac{5}{\sqrt[3]{3}}$	Ejercicio dado
$\frac{5\cdot\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{3^2}}$	Se amplifica la fracción multiplicando por $\sqrt[3]{3^2}$
$\frac{5\cdot\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3^3}}$	Se simplifica aplicando la propiedad (3.1) de la radicación y potenciación
$\frac{5\sqrt[3]{3^2}}{3}$	Se simplifica por el radical

Procedimiento 3.3 –Racionalización de una resta de radicales de índice dos.
Para racionalizar la expresión $\dfrac{c}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ se amplifica multiplicando por $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$, es decir

$$\frac{c}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{c\cdot\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\cdot\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}=\frac{c\cdot\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{a-b}$$

Ejemplo 3.23 –Racionalizar una diferencia de radicales

Racionalizar el denominador de la expresión $\frac{4}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

$\frac{4}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$	Ejercicio dado
$\frac{4\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$	Se amplifica multiplicando por $(\sqrt{3}+\sqrt{2})$
$\frac{4\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{3-2}$	Se simplifica aplicando distributiva al denominador
$4(\sqrt{3}+\sqrt{2})$	Respuesta, luego de efectuar la resta en el denominador.

El paso tres, puede ser entendido como una aplicación del procedimiento (3.3) o como la aplicación de la ley distributiva de la multiplicación con respecto a la suma; en efecto, la operación $(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})$, se resuelve así:

$$\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)=\sqrt{3}\sqrt{3}+\cancel{\sqrt{3}\sqrt{2}}-\cancel{\sqrt{3}\sqrt{2}}+\sqrt{2}\sqrt{2}=\sqrt{3}^2-\sqrt{2}^2=3-2=1$$

En el proceso de cálculo se han aplicado, además de distributiva, propiedades de exponentes y radicales.

Procedimiento 3.4 Racionalización de una suma de radicales de índice dos
Para racionalizar la expresión $\dfrac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ se amplifica multiplicando por $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)$, es decir

$$\frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{c\cdot\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\cdot\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}=\frac{c\cdot\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{a-b}$$

Ejemplo 3.24 –Racionalizar una suma de radicales

Racionalizar el denominador de la expresión $\frac{-6}{\sqrt{11}+\sqrt{5}}$

$\frac{-6}{\sqrt{11}+\sqrt{5}}$	Ejercicio dado
$\frac{-6\cdot(\sqrt{11}-\sqrt{5})}{(\sqrt{11}+\sqrt{5})\cdot(\sqrt{11}-\sqrt{5})}$	Se amplifica multiplicando por $(\sqrt{11}+\sqrt{5})$
$\frac{-6\cdot(\sqrt{11}-\sqrt{5})}{11-5}$	Se simplifica el producto en el denominador
$\frac{-\cancel{6}\cdot(\sqrt{11}-\sqrt{5})}{\cancel{6}}$	Se efectua la resta en el denominador
$-\left(\sqrt{11}-\sqrt{5}\right)$	Resultado luego de cancelar el factor 6

En los dos ejemplos de simplificación de sumas y restas de radicales mostrados, no se efectuó el producto en el numerador, ya que con frecuencia el resultado del denominador se cancela con un factor en el numerador. Se presenta un ejemplo en el cual sí sea necesario efectuar la multiplicación en el numerador con el objetivo de simplificar la expresión dada.

Ejemplo 3.25 –Simplificación de un radical

Racionalizar $\frac{1-2\sqrt{14}}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$

$\frac{1-2\sqrt{14}}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$	Ejercicio dado
$\frac{(1-2\sqrt{14})\cdot(\sqrt{7}-\sqrt{2})}{(\sqrt{7}+\sqrt{2})\cdot(\sqrt{7}-\sqrt{2})}$	Se multiplica por el factor $(\sqrt{7}-\sqrt{2})$
$\frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}-2\sqrt{14}\sqrt{7}+2\sqrt{14}\sqrt{2}}{7-2}$	Se realiza distributiva en el numerador y denominador
$\frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}-2\sqrt{98}+2\sqrt{28}}{5}$	Propiedad, producto de radicales, $\sqrt{14}\sqrt{7}=\sqrt{14\cdot 7}=\sqrt{98}$
$\frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}-2\cdot 7\sqrt{2}+2\cdot 2\sqrt{7}}{5}$	Se simplifican los radicales, $\sqrt{98}=\sqrt{49\cdot 2}=\sqrt{7^2\cdot 2}=7\sqrt{2}$
$\frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}-14\sqrt{2}+4\sqrt{7}}{5}$	Se efectuan las multiplicaciones indicadas
$\frac{\cancel{5}\sqrt{7}-\cancel{15}\sqrt{2}}{\cancel{5}}$	Se simplifican los radicales comunes
$\sqrt{7}-3\sqrt{2}$	Resultado, luego de dividir todos los términos por 5

En el paso tres del procedimiento, en el denominador se efectuó la propiedad distributiva, pero ya se sabe que su resultado es $7-2$, de los ejercicios precedentes. El aspecto a resaltar es que se identifica por cuál factor hay que multiplicar la fracción para poder eliminar los radicales del denominador, lo demás en el desarrollo, son operaciones y propiedades de la potenciación y radicación.

3.8 Ejercicios de capítulo

Resumen.

1. Concepto de radicación.
2. Leyes de los radicales.
3. Simplificación de polinomios aritméticos.

Ejercicio 3.2

Aplicación de las leyes de los radicales

Escribir en forma de radical.

1. $2^{\frac{3}{5}}$
2. $\left(\frac{2}{7}\right)^{\frac{1}{2}}$
3. $9^{\frac{4}{5}}$
4. $4^{\frac{3}{5}}$
5. $3^{\frac{5}{2}}$
6. $9^{\frac{1}{4}}$
7. $2^{\frac{5}{6}}$
8. $4^{\frac{1}{9}}$
9. $6^{\frac{1}{4}}$
10. $5^{\frac{3}{2}}$
11. $3^{\frac{4}{5}}$
12. $5^{\frac{1}{2}}$
13. $5^{-\frac{1}{3}}$
14. $5^{\frac{3}{4}}$
15. $5^{-\frac{4}{5}}$
16. $\left(\frac{3}{10}\right)^{\frac{3}{5}}$
17. $3^{-\frac{1}{4}}$
18. $\left(\frac{3}{8}\right)^{-\frac{2}{5}}$
19. $8^{\frac{6}{24}}$
20. $3^{\frac{-8}{12}}$
21. $27^{\frac{2}{18}}$
22. $4^{\frac{1}{9}}$

Escribir en forma de potencia los siguientes radicales.

23. $\sqrt{7}$
24. $\sqrt[5]{2^4}$
25. $\sqrt[12]{3^7}$
26. $\sqrt[3]{4^{-2}}$
27. $\sqrt[4]{7^3}$
28. $\sqrt[7]{2^9}$
29. $\sqrt[3]{5^4}$
30. $\sqrt{12^3}$
31. $\sqrt[7]{3^{21}}$
32. $\sqrt[4]{7^2}$

Calcular las siguientes raíces; en caso de no ser exactas, escribirlas en la forma más simple.

33. $\sqrt[6]{16}$
34. $\sqrt[12]{3^3}$
35. $\sqrt[10]{243}$
36. $\sqrt[4]{7^8}$
37. $\sqrt[4]{2^6}$
38. $\sqrt[6]{4^9}$
39. $\sqrt[30]{2^{12}}$
40. $\sqrt{2^4}$
41. $\sqrt[3]{3^{15}}$
42. $\sqrt[4]{5^6}$
43. $\sqrt[12]{7^8}$
44. $\sqrt[3]{1000}$
45. $\sqrt{5^4}$
46. $\sqrt[6]{5^2}$
47. $\sqrt[8]{5^6}$
48. $\sqrt[12]{2^8}$
49. $\sqrt{25}$
50. $\sqrt[3]{-8}$
51. $-\sqrt[4]{16}$
52. $\sqrt{\sqrt{10}}$
53. $\sqrt{\sqrt{\sqrt{8}}}$
54. $\sqrt[3]{x} = 10$
55. $\sqrt[x]{27} = 3$

Evaluar las siguientes expresiones

56. $\sqrt[4]{36}$
57. $\sqrt[6]{64}$
58. $(-8)^{\frac{2}{3}}$
59. $\frac{5}{2} \cdot \sqrt[3]{-8}$
60. $\sqrt{-2 \cdot 2 \cdot 2 + 5^2 - \pi^0}$
61. $\sqrt{\frac{10^3 - 10^2}{10}}$
62. $\sqrt{\frac{2^7 - 2^6}{2}}$
63. $A = \sqrt[6]{\frac{8^{5+\frac{1}{3}}}{2^6 2^4}}$
64. $\sqrt[6]{\frac{1}{64}} \cdot \left(8^{-\frac{1}{3}}\right)$
65. $\left(\frac{243}{32}\right)^{-\frac{1}{5}} \cdot \sqrt{\frac{9}{4}}$
66. $\frac{\sqrt{36\sqrt[3]{36\sqrt[4]{36}}}}{\sqrt[4]{36\sqrt[3]{36\sqrt{36}}}}$

Reescribir la expresión de manera que su coeficiente quede dentro del radical.

67. $2\sqrt[3]{3}$
68. $2\sqrt[6]{2^2}$
69. $3\sqrt[3]{3}$
70. $\frac{1}{5}\sqrt[3]{25}$
71. $5\sqrt{3}$
72. $2\sqrt[4]{3}$
73. $3\sqrt{6}$
74. $4\sqrt[3]{2}$
75. $5\sqrt{2}$
76. $3^2\sqrt[3]{5}$
77. $3^2 5^4\sqrt[3]{15}$
78. $5^2 3^2\sqrt[4]{5 \cdot 3^3}$
79. $3\sqrt[3]{6}$
80. $2\sqrt{\frac{3}{5}}$
81. $\frac{3}{4}\sqrt{\frac{1}{2}}$
82. $3\sqrt{5}$
83. $5\sqrt[3]{4}$
84. $2^3\sqrt[5]{3}$
85. $(-5)\sqrt[3]{2}$

Simplificar los siguientes radicales.

86. $\sqrt{2^6}$
87. $\sqrt[6]{5^3}$
88. $\sqrt[9]{3^6}$
89. $\sqrt[12]{5^9}$
90. $\sqrt{50}$
91. $\sqrt[3]{32}$
92. $\sqrt[4]{81 \cdot 32}$
93. $\sqrt{9+16}$
94. $\sqrt{9} + \sqrt{16}$
95. $\sqrt{25-9}$
96. $\sqrt{25} - \sqrt{9}$
97. $\sqrt{18}$
98. $\sqrt[3]{81 \cdot 2^{15}}$
99. $\sqrt[4]{64 \cdot 3^{17} \cdot 5^9}$
100. $\sqrt[3]{\frac{-1}{81}}$
101. $\sqrt{2^4}$
102. $\sqrt[3]{3^{15}}$
103. $\sqrt[4]{5^6}$
104. $\sqrt[12]{7^8}$

105. $\sqrt[4]{2^6}$
106. $\sqrt[6]{4^9}$
107. $\sqrt[30]{2^{12}}$
108. $\sqrt{12}$
109. $\sqrt{45}$
110. $\sqrt[3]{54}$
111. $\sqrt{27}$
112. $\sqrt[3]{32}$
113. $\sqrt[4]{162}$
114. $\sqrt[6]{16}$
115. $\sqrt[12]{3^3}$
116. $\sqrt[10]{243}$
117. $\sqrt[4]{7^8}$
118. $\sqrt[24]{11^{36}}$
119. $\sqrt[18]{3^{12}}$
120. $\sqrt[6]{625}$
121. $\sqrt[15]{2^{18}3^{12}}$
122. $\sqrt[3]{625}$
123. $\sqrt[4]{288}$
124. $\sqrt[3]{432}$
125. $\sqrt{300}$
126. $\sqrt{\dfrac{125}{8}}$
127. $\sqrt[3]{\dfrac{54}{64}}$
128. $\sqrt{36000}$
129. $\sqrt[3]{270000}$
130. $\sqrt[4]{8100000}$

Escribir 3 radicales equivalentes a la raíz dada.

131. $\sqrt{7}$
132. $\sqrt[5]{2^3}$
133. $\sqrt[12]{6^4}$
134. $\sqrt[15]{3^{10}}$

Simplificar los siguientes polinomios aritméticos.

135. $\sqrt{72}-\sqrt{50}+\sqrt{18}-\sqrt{8}+\sqrt{200}$
136. $2\sqrt{75}-3\sqrt{12}+5\sqrt{27}-7\sqrt{48}+\sqrt{300}$
137. $\sqrt{75}-\sqrt{12}+\sqrt{27}-\sqrt{48}+\sqrt{300}$
138. $3\sqrt{50}+4\sqrt{18}-5\sqrt{8}+2\sqrt{200}$

Reducir a un índice común los siguientes radicales.

139. $\sqrt{5},\ \sqrt[5]{2^3},\ \sqrt[15]{7^2}$
140. $\sqrt[4]{9},\ \sqrt[6]{11},\ \sqrt[15]{13}$
141. $\sqrt[3]{6},\ \sqrt[6]{2},\ \sqrt[4]{5^3}$
142. $\sqrt{2^3},\ \sqrt[4]{3},\ \sqrt[5]{2^4}$
143. $\sqrt{3},\ \sqrt[5]{2}$
144. $\sqrt[4]{5},\ \sqrt[6]{4}$
145. $\sqrt[4]{6},\ \sqrt[6]{4}$
146. $\sqrt[3]{5},\ \sqrt[5]{7^3},\ \sqrt[15]{3^2}$

Efectuar los siguientes productos y expresar como un sólo radical si es necesario.

147. $\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}$
148. $\sqrt{5}\cdot\sqrt[3]{2}$
149. $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{50}$
150. $\sqrt[6]{3}\cdot\sqrt[8]{5}$
151. $\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}$
152. $\sqrt[3]{12}\cdot\sqrt[3]{10}$
153. $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{2}$
154. $\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[6]{3}$
155. $\sqrt{5}\sqrt[4]{3}$
156. $\sqrt[6]{3}\sqrt{2}$
157. $\sqrt[4]{3}\sqrt{6}\sqrt[6]{2}$
158. $\sqrt[12]{9}\sqrt[4]{3}\sqrt[3]{2}$

Efectuar los siguientes cocientes y expresar como un sólo radical si es necesario.

159. $\sqrt{5}:\sqrt[8]{25}$
160. $\sqrt[4]{6^2}:\sqrt[10]{6}$
161. $\sqrt{3}:\sqrt[6]{27}$
162. $\sqrt[9]{32}:\sqrt[3]{2}$
163. $\sqrt[4]{36}:\sqrt[6]{6}$
164. $\sqrt{6}:\sqrt{2}$
165. $\sqrt[3]{40}:\sqrt[3]{5}$
166. $\sqrt[3]{4}:\sqrt{6}$
167. $\sqrt[3]{9}:\sqrt[6]{18}$
168. $\sqrt{6}:\sqrt{3}$
169. $\sqrt[3]{9}:\sqrt{12}$
170. $\sqrt[3]{2}:\sqrt[5]{3}$

Calcular y expresar la respuesta como un radical.

171. $9^{\frac{1}{4}}2^{\frac{1}{4}}$
172. $5^{\frac{2}{3}}4^{\frac{1}{3}}$
173. $16^{\frac{2}{5}}:4^{\frac{3}{5}}$
174. $10^{\frac{3}{4}}:5^{\frac{1}{4}}$
175. $\sqrt{8}\sqrt{2}$
176. $\sqrt[3]{9}\sqrt[3]{12}$
177. $\sqrt[3]{625}:\sqrt[3]{5}$
178. $\sqrt{10}:\sqrt{6}$
179. $\sqrt[3]{6}:2^{\frac{1}{3}}$
180. $4^{\frac{3}{5}}:\sqrt[5]{2}$
181. $\sqrt{3}:\sqrt[6]{27}$
182. $\sqrt[9]{32}:\sqrt[3]{2}$
183. $\sqrt[4]{36}:\sqrt[6]{6}$
184. $\sqrt{5}:\sqrt[8]{25}$
185. $\sqrt[4]{6^2}:\sqrt[10]{6}$
186. $\sqrt[4]{28}\left(\sqrt{14}:\sqrt{7}\right)$
187. $\sqrt{9}:\left(\sqrt[3]{9}\sqrt[3]{3}\right)$

Racionalizar las siguientes expresiones:

188. $\dfrac{6}{\sqrt{3}}$

189. $\dfrac{10}{\sqrt[3]{5}}$

190. $\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

191. $\dfrac{4}{\sqrt{2}}$

192. $\dfrac{7}{\sqrt[3]{14}}$

193. $\dfrac{5}{2-\sqrt{3}}$

194. $\dfrac{10}{\sqrt{6}}$

195. $\dfrac{12}{\sqrt[3]{4}}$

196. $\dfrac{14}{3-\sqrt{3}}$

197. $\dfrac{21}{\sqrt[5]{7}}$

198. $\dfrac{35}{\sqrt[5]{7^3}}$

199. $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

200. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

201. $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

202. $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

Simplificar los siguientes polinomios aritméticos.

203. $\sqrt{2}\sqrt[3]{2}+\sqrt[6]{8}\sqrt[3]{2}$

204. $\sqrt{5}+\sqrt{45}-\sqrt{80}+\sqrt{180}$

205. $\sqrt{48}+\sqrt{\dfrac{75}{49}}$

206. $\sqrt[3]{4}+6\sqrt[3]{4}-7\sqrt[3]{2^2}$

207. $\sqrt{8}-\sqrt{2}+4\sqrt{50}$

208. $\left(\sqrt{2}+3\sqrt{2}\right)\sqrt{6}$

209. $\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{10}$

210. $3\sqrt[3]{7}+10\sqrt[3]{7}-5\sqrt[3]{7}$

211. $4\sqrt{12}-3\sqrt{27}+\sqrt{75}$

212. $8\sqrt{2}+5\sqrt{2}-16\sqrt{2}-\sqrt{2}$

213. $\sqrt{8}-\sqrt{18}+\sqrt{50}$

214. $\sqrt[3]{4}+6\sqrt[3]{4}-7\sqrt[3]{2^2}$

215. $\sqrt{8}-\sqrt{2}+4\sqrt{50}$

216. $\left(\sqrt{2}+3\sqrt{2}\right)\sqrt{6}$

217. $\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{10}$

218. $3\sqrt[3]{7}+10\sqrt[3]{7}-5\sqrt[3]{7}$

219. $4\sqrt{12}-3\sqrt{27}+\sqrt{75}$

220. $\sqrt{2}\sqrt[3]{2}+\sqrt[6]{8}\sqrt[3]{2}$

221. $\sqrt[4]{28}\left(\sqrt{14}:\sqrt{7}\right)$

222. $\sqrt{9}:\left(\sqrt[3]{9}\sqrt[3]{3}\right)$

223. $\sqrt{5}+\sqrt{45}-\sqrt{80}+\sqrt{180}$

224. $\sqrt{48}+\sqrt{\dfrac{75}{49}}$

225. $\sqrt[3]{64}-2\cdot\sqrt[3]{27}+3\cdot\sqrt[3]{729}$

226. $\dfrac{2}{3}-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2+\sqrt[3]{\dfrac{1}{27}}$

227. $\dfrac{\left(\frac{5}{18}-\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{2^3+1}}$

228. $\left[\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3}-3\right)+\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}\right]\div\sqrt{\dfrac{1}{4}}$

229. $\dfrac{\left(-\frac{1}{3}\right)^3+(-3)^{-2}}{\sqrt{\frac{4}{81}-\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}}}$

230. $\dfrac{\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(2\sqrt[3]{-64}\right)^{-1}}{2^{-1}\div 4}$

231. $\left[\dfrac{(-2+3)^3-3^0}{2^3\cdot 4+1}\right]\div\left[\left(\dfrac{-1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}-(-3)^{-3}\right]$

232. $\dfrac{\left(\frac{-1}{3}\right)^3+2^{-1}+3^0}{\sqrt{\frac{16}{81}-\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}}}$

233. $\dfrac{\left(-\frac{1}{2}\right)^3+3^{-1}+\left|(-2)^{-2}\right|}{\sqrt{\frac{4}{81}-\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}}}$

234. $\dfrac{5+\frac{1}{3}-\frac{5}{4}}{\frac{23}{10}}-\dfrac{\sqrt{4^3-7\cdot 4}}{(3-5)^2}$

235. $\left[\left(\dfrac{5\cdot 3^4\cdot 4^5\cdot 6}{16\cdot 3^{-6}\cdot 4\cdot 6^5}\right)^0+3\right]^{\frac{1}{2}}$

236. $\left(9^{-\frac{1}{4}}+\left(3\sqrt{3}\right)^{-\frac{4}{3}}\right)\cdot\left(9^{-\frac{1}{4}}-\left(3\sqrt{3}\right)^{-\frac{4}{3}}\right)$

237. $\left(12\sqrt{42}+3\sqrt{18}\right)\cdot\dfrac{1}{6\sqrt{14}}$

238. $\left(\frac{1}{2}\sqrt[4]{8}+2\frac{1}{4}\sqrt[4]{\frac{2}{3}}-\frac{6}{10}\sqrt[4]{\frac{5}{2}}\right)\cdot\frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{6}{5}}$

239. $\left(12\sqrt[3]{6}-\frac{1}{6}\sqrt[3]{180}+\frac{3}{\sqrt[3]{150}}\right)\cdot\frac{10}{4\sqrt[3]{6}}$

240. $\left(3\sqrt[3]{15}+2\sqrt[6]{60}-\sqrt[6]{75}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt[6]{3}}$

241. $\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{7}{12}}{\frac{1}{2}-\frac{2}{15}}\right)\times\sqrt{\left(\frac{5}{9}\right)^{-2}\times\frac{1}{3^2}}$

242. $\left(\sqrt{-5+105}:(-2)\right)-(3\cdot(-5+4))^3$

243. $\left[\sqrt{-8+108}:(-2)\right]-[4\cdot(-8+7)]^3$

244. $\sqrt[3]{\left[\frac{\left(4+\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{20}+\frac{2}{5}}\right]\times\frac{81}{20\times16}}$

245. $\sqrt[\sqrt{2}]{\sqrt[3\sqrt{2}]{27^2}}+\left(\frac{1}{125}\right)^{-3^{-1}}$

246. $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}+\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}+\left(\frac{4}{7}\right)^{-1}\right\}^2$

247. $-(-7)^0-4\sqrt{3^0}+\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}+\left(\frac{8}{5}\right)^{-1}$

248. $\frac{\sqrt{15}-\sqrt{6}}{\sqrt{35}-\sqrt{14}}$

249. $\frac{\sqrt{10}+\sqrt{15}}{\sqrt{8}+\sqrt{12}}$

250. $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}-\frac{\sqrt{2}+3}{\sqrt{2}}$

251. $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$

252. $\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}$

253. $\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{\left(5-2\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{\left(3-2\sqrt{3}\right)^2}$

254. $\sqrt[3]{\frac{-1728}{27}}$

255. $\sqrt[3]{\frac{8}{27}\times125}$

256. $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{\left(\frac{9}{4}\right)^6}}}$

257. $\sqrt[3]{4^2\sqrt[3]{4^4\sqrt[3]{4^5}}}$

258. $\sqrt[3]{3^2\sqrt{3^5}}\sqrt{\sqrt[3]{3^9}}$

259. $\sqrt[5]{2^4\sqrt[3]{2^2\sqrt[4]{2^4}}}\cdot2^{-1}$

260. $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{4^{\sqrt{4}^{3+3}}}}}}$

261. $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{4^{\sqrt{4}^{5+3}}}}}}}}$

262. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2^{4^{32^{\left(\frac{1}{5}\right)}}}}+\left(\frac{1}{3}\right)^{-\left(\frac{1}{8}\right)^{-3^{-1}}}$

263. $\sqrt[2^6]{\sqrt[2^4]{5^{4^4}}}$

264. $\sqrt[3]{4\sqrt[4]{8\sqrt[5]{16}}}\left(\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{\sqrt[5]{2}}}}\right)^{-29}$

265. $\sqrt[5]{4\sqrt[3]{8^5}}\sqrt[5]{8\sqrt[3]{4^0}}$

266. $\sqrt[4]{8^5\left(\sqrt[15]{2^{11}}\,\sqrt[15]{4^2}\right)}$

267. $\sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}}$

268. $([-16:(-8)]-(-6+4))^2:\left[(-1)\cdot\sqrt[3]{-3+9-15+1}\right]^3$

269. $\sqrt[3]{[49:(4-35+24)]^2+15}+\left[(-1)^3\cdot(-2)^3\cdot(-3)^3\right]$

270. $\left[-16+35+48+(-1)^9\right]-\left(\sqrt[3]{-39+66}\right)^2$

271. $\left[(-2)^3\cdot(-4+5)^6\right]-\left[\sqrt[4]{-79+95}\cdot(-2)\right]^2$

272. $\left(\sqrt{-18+36-1+8}\right)^3-\left(\sqrt[3]{-81+63-9}\right)^2$

273. $\left[(-36+21+14)^5\cdot(-6+5)\right]^5-\left(\sqrt[3]{81:(-5+2)}\right)$

274. $\left(\frac{\sqrt[6]{32}}{2\sqrt{2}-2}\right)^3-\left[\frac{6+5\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-2}-\frac{1}{2}\left(2+\sqrt{2}\right)^2\right]$

275. $\left[\sqrt{(131-212)(-1)}:\sqrt[3]{-313+121+219}\right]\cdot(-414+141)$

276. $\left[(-1)\cdot\left[(-46-72)-(-310+196)\right]^2\right]:\left[\sqrt{(-31+9-42)\cdot(-1)}\right]$

Dar solución a los siguientes problemas.
Calcular el valor indicado.

277. El cuadrado de la raíz cúbica de 27.

278. La raíz cuadrada de la raíz cuarta de 256.

279. El cubo de la raíz cuadrada de 15.

280. La raíz cúbica de la raíz cuadrada de 12.

281. Encontrar la raíz séptima de 1,280,000,000 sin usar calculadora.

282. El área de un terreno cuadrado es $169m^2$. ¿Cuánto medirá el perímetro del terreno?

283. En una habitación se quieren colocar 3 mesas cuadradas de $2m^2$ cada una y 2 mesas,también cuadradas, de $8m^2$ cada una. Puestas una a continuación de otra, ¿qué longitud ocuparán todas las mesas?

284. Un abuelo tiene el cuadrado del cubo de la edad de su nieto. ¿Cuál es la edad de su nieto si tiene 64 años?

285. El volumen de un cubo es $1000m^3$. ¿Cuál es el área de una de sus caras?

286. El área de un terreno de forma cuadrada es $169m^2$. ¿Cuánto medirá el perímetro del terreno?

287. El área de un terreno cuadrado es $625m^2$. ¿ Cuál será el área de otro terreno cuyo lado es el triple del primero? Expresa el resultado en forma de potencia.

3.9 Respuestas a los ejercicios del capítulo

1. 9
2. 5
3. 4
4. 1
5. 7
6. 26
7. 17
8. 11
9. 29
10. 11
11. 22
12. 33
13. 21
14. 19
15. 9
16. 5
17. 4
18. 1
19. 7
20. $\frac{1}{2}$
21. 2
22. 3
23. 2
24. 3
25. 2
26. 3
27. 2
28. 3
29. 2
30. 3
31. 2
32. 2
33. 2
34. 2
35. 2
36. 2
37. 2
38. 2
39. 2
40. 3
41. 25
42. 125
43. 4
44. 8
45. 1
46. 1
47. 0
48. 0
49. 9
50. 27
51. 169
52. 225
53. 784
54. 225
55. 841
56. 144
57. 484
58. 676
59. 361
60. $\frac{1}{25}$

Respuestas ejercicio 3.2

1. $\sqrt[5]{2^3}$
2. $\sqrt{\frac{2}{7}}$
3. $\sqrt[5]{9^4}$
4. $\sqrt[5]{4^3}$
5. $\sqrt{3^5}$
6. $\sqrt[4]{9}$
7. $\sqrt[6]{2^5}$
8. $\sqrt[9]{4}$
9. $\sqrt[4]{6}$
10. $\sqrt{5^3}$
11. $\sqrt[5]{3^4}$
12. $\sqrt{5}$
13. $\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$

14. $\sqrt[4]{5^3}$
15. $\frac{1}{\sqrt[5]{5^4}}$
16. $\sqrt[5]{\left(\frac{3}{10}\right)^3}$
17. $\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$
18. $\sqrt[5]{\left(\frac{8}{3}\right)^2}$
19. $\sqrt[4]{8}$
20. $\sqrt[3]{\frac{1}{3^2}}$
21. $\sqrt[3]{3}$
22. $\sqrt[9]{4}$
23. $7^{\frac{1}{2}}$
24. $2^{\frac{4}{5}}$
25. $3^{\frac{7}{12}}$
26. $4^{\frac{-2}{3}}$
27. $7^{\frac{3}{4}}$
28. $2^{\frac{9}{7}}$
29. $5^{\frac{4}{3}}$
30. $12^{\frac{3}{2}}$
31. 3^3
32. $7^{\frac{1}{2}}$
33. $\sqrt[3]{4}$
34. $\sqrt[4]{3}$
35. $\sqrt{3}$
36. 49
37. $\sqrt{2^3}$
38. 8
39. $\sqrt[5]{2^2}$
40. 2^2
41. 3^5
42. $\sqrt{5^3}$
43. $\sqrt[3]{7^2}$
44. 10
45. 5^2
46. $\sqrt[3]{5}$
47. $\sqrt[4]{5^3}$
48. $\sqrt[3]{2^2}$
49. ± 5
50. -2
51. ± 2
52. $\sqrt[4]{10}$
53. $\sqrt[8]{8}$
54. 1000
55. 3
56. $\sqrt{6}$
57. 2
58. 4
59. -5
60. 4
61. $3\sqrt{10}$
62. $4\sqrt{2}$
63. 2
64. $\frac{1}{4}$
65. 1
66. $\sqrt[3]{6^2}$
67. $\sqrt[3]{24}$
68. $\sqrt[6]{256}$
69. $\sqrt[3]{81}$
70. $\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$
71. $\sqrt{75}$
72. $\sqrt[4]{48}$
73. $\sqrt{54}$
74. $\sqrt[3]{128}$
75. $\sqrt{50}$
76. $\sqrt[3]{3^6 \cdot 5}$
77. $\sqrt[3]{3^7 \cdot 5^{13}}$
78. $\sqrt[4]{5^9 3^{11}}$
79. $\sqrt[3]{162}$
80. $\sqrt{\frac{12}{5}}$
81. $\sqrt{\frac{9}{32}}$
82.
83.
84.
85.
86. 8
87. $\sqrt{5}$
88. $\sqrt[3]{3^2}$
89. $\sqrt[4]{5^3}$
90. $5\sqrt{2}$
91. $2\sqrt[3]{4}$
92. $6\sqrt[4]{2}$
93. 5
94. 7
95. 4
96. 2
97. $3\sqrt{2}$
98. $3 \cdot 2^5 \sqrt[3]{3}$
99. $2 \cdot 3^4 5^2 \sqrt[4]{60}$
100. $-\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$
101. 2^2
102. 3^5
103. $\sqrt{5^3}$
104. $\sqrt[3]{7^2}$
105. $\sqrt{2^3}$
106. 8
107. $\sqrt[5]{2^2}$
108. $2\sqrt{3}$
109. $3\sqrt{5}$
110. $3\sqrt[3]{2}$
111. $3\sqrt{3}$
112. $2\sqrt[3]{2^2}$
113. $3\sqrt[4]{2}$
114. $\sqrt[3]{4}$
115. $\sqrt[4]{3}$
116. $\sqrt{3}$
117. 49
118. $\sqrt{11^3}$
119. $\sqrt[3]{3^2}$
120. $\sqrt[3]{5^2}$
121. $\sqrt[5]{2^6 3^4}$
122. $5\sqrt[3]{5}$
123. $2\sqrt[4]{18}$
124. $6\sqrt[3]{2}$
125. $10\sqrt{3}$
126. $\frac{5}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}$
127. $\frac{3}{4}\sqrt[3]{2}$
128. $60\sqrt{10}$
129. $30\sqrt[3]{10}$

130. $30\sqrt[4]{10}$
131. $\sqrt[4]{7^2} = \sqrt[6]{7^3} = \sqrt[12]{7^6}$
132. $\sqrt[10]{2^6} = \sqrt[15]{2^9} = \sqrt[30]{2^{18}}$
133. $\sqrt[3]{6} = \sqrt[6]{6^2} = \sqrt[9]{6^3}$
134. $\sqrt[3]{3^2} = \sqrt[9]{3^6} = \sqrt[6]{3^4}$
135. $12\sqrt{2}$
136. $\sqrt{3}$
137. $12\sqrt{2}$
138. $37\sqrt{2}$
139. $\sqrt[30]{5^{15}}$, $\sqrt[30]{2^{18}}$, $\sqrt[30]{7^7}$
140. $\sqrt[60]{9^{15}}$, $\sqrt[60]{11^{10}}$, $\sqrt[60]{13^4}$
141. $\sqrt[12]{6^4}$, $\sqrt[12]{2^2}$, $\sqrt[12]{5^9}$
142. $\sqrt[20]{2^{30}}$, $\sqrt[20]{3^5}$, $\sqrt[20]{2^{16}}$
143. $\sqrt[10]{3^5}$, $\sqrt[10]{2^2}$
144. $\sqrt[12]{5^3}$, $\sqrt[12]{4^2}$
145. $\sqrt[12]{6^3}$, $\sqrt[12]{4^2}$
146. $\sqrt[15]{5^5}$, $\sqrt[15]{7^9}$, $\sqrt[15]{3^2}$
147. $2\sqrt{3}$
148. $\sqrt[6]{500}$
149. $5\sqrt[3]{2}$
150. $\sqrt[24]{10125}$
151. $3\sqrt{2}$
152. $2\sqrt[3]{15}$
153. $\sqrt[6]{108}$
154. $\sqrt[12]{1125}$
155. $\sqrt[4]{75}$
156. $\sqrt[6]{24}$
157. $\sqrt[12]{3^9 2^8}$
158. $\sqrt[12]{3^5 2^4}$
159. $\sqrt[4]{5}$
160. $\sqrt[5]{36}$
161. 1
162. $\sqrt[9]{4}$
163. $\sqrt[3]{6}$
164. $\sqrt{3}$
165. 2
166. $\sqrt[6]{\frac{2}{27}}$
167. $\sqrt[6]{\frac{9}{2}}$
168. $\sqrt{2}$
169. $\frac{\sqrt[6]{3}}{2}$
170. $\sqrt[15]{\frac{32}{27}}$
171. $\sqrt[4]{18}$
172. $\sqrt[3]{100}$
173. $\sqrt[5]{4}$
174. $\sqrt[4]{200}$
175. 4
176. $3\sqrt[3]{4}$
177. 5
178. $\sqrt{\frac{5}{3}}$
179. $\sqrt[3]{3}$
180. 2
181. 1
182. $\sqrt[9]{4}$
183. $\sqrt[3]{6}$
184. $\sqrt[4]{5}$
185. $\sqrt[5]{36}$
186. $\sqrt[4]{112}$
187. 1
188. $2\cdot\sqrt{3}$
189. $2\cdot\sqrt[3]{5^2}$
190. $\sqrt{5}-\sqrt{3}$
191. $2\cdot\sqrt{2}$
192. $\frac{\sqrt[3]{14^2}}{2}$
193. $10-5\sqrt{3}$
194. $\frac{5\sqrt{6}}{3}$
195. $6\sqrt[3]{2}$
196. $\frac{7(3+\sqrt{3})}{3}$
197. $3\sqrt[5]{7^4}$
198. $5\sqrt[5]{7^2}$
199. $3-\sqrt{6}$
200. $\sqrt{6}+2$
201. $5+2\sqrt{6}$
202. $5-2\sqrt{6}$
203. $2\sqrt[6]{32}$
204. $6\sqrt{5}$
205. $\frac{33}{7}\sqrt{3}$
206. 0
207. $21\sqrt{2}$
208. $8\sqrt{3}$
209. $-\sqrt[3]{10}$
210. $8\sqrt[3]{7}$
211. $4\sqrt{3}$
212. $-4\sqrt{2}$
213. $4\sqrt{2}$
214. 0
215. $21\sqrt{2}$
216. $8\sqrt{3}$
217. $-\sqrt[3]{10}$
218. $8\sqrt[3]{7}$
219. $4\sqrt{3}$
220. $2\sqrt[6]{32}$
221. $\sqrt[4]{112}$
222. 1
223. $6\sqrt{5}$
224. $\frac{33}{7}\sqrt{3}$
225. 25
226. $\frac{16}{25}$
227. $\frac{1}{18}$
228. $\frac{49}{18}$
229. $-\frac{2}{69}$
230. 3
231. 0
232. $-\frac{158}{627}$
233. $-\frac{33}{184}$
234. $\frac{19}{69}$
235. 2
236. $\frac{26}{81}$
237. $\frac{28\sqrt{3}+3\sqrt{7}}{14}$
238. $\frac{4\sqrt[3]{375}+2\sqrt[4]{500}-12\sqrt[4]{3}}{15}$
239. $\frac{90-\sqrt[3]{30}}{6}$
240. $3\sqrt[6]{75}+2\sqrt[6]{20}-\sqrt[6]{25}$
241. $\frac{63}{55}$
242. 22
243. 59
244. $\frac{9}{4}$

245. 8

246. 256

247. -1

248. $\frac{\sqrt{21}}{7}$

249. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

250. $\frac{10-3\sqrt{2}}{2}$

251. $\frac{23-\sqrt{5}}{2}$

252. $2-\sqrt{3}$

253. $10-3\sqrt{3}$

254. -4

255. $\frac{10}{3}$

256. $\frac{3}{2}$

257. $4\sqrt[27]{2^{16}}$

258. 27

259. 1

260. 256

261. 256

262. $2^{2^{16}}+9$

263. $\sqrt[4]{5}$

264. $\sqrt[10]{2^7}$

265. 4

266. 16

267. $\frac{2}{3}$

268. $\frac{-1}{4}$

269. -212

270. 57

271. -8

272. 116

273. 4

274. $4+3\sqrt{2}$

275. -819

276. -2

277. 9

278. 2

279. $15\sqrt{15}$

280. $\sqrt[6]{12}$

281. 20

282. $52m$

283. $7\sqrt{2}m$

284. $2años$

285. $100m^2$

286. $52m$

287. $3^2 5^4 m^2$

4 Logaritmación

4.1 Logaritmación

Ya se han definido seis de las siete operaciones aritméticas básicas, sólo resta por tratar la logaritmación. Como se ha mencionado anteriormente, existe una relación entre las operaciones aritméticas: la multiplicación es una suma abreviada, la potenciación es una multiplicación igualmente abreviada. Se presenta una figura que aclara la relación existente entre las operaciones potenciación, radicación y logaritmación, tomando como base de la explicación la potenciación.

Estas tres operaciones no cumplen con la propiedad clausurativa, así que suponemos que en cada una de ellas es posible calcularlas para ciertos valores de a, b y n.

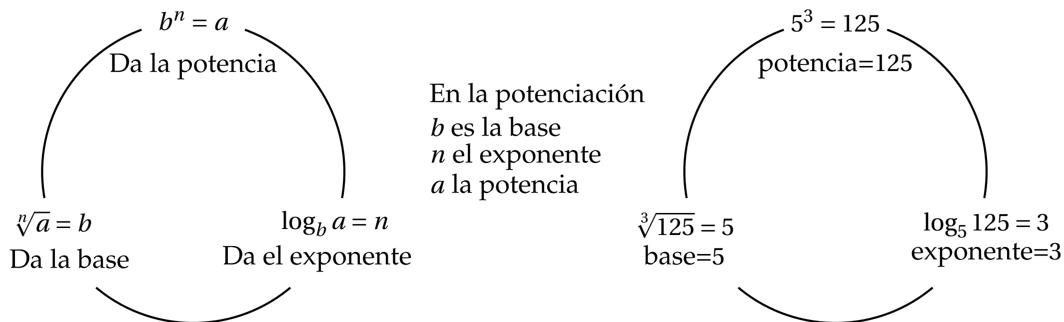


Figura 4.1: Relación entre potenciación, radicación y logaritmación

Según la figura, la potenciación es una operación que pregunta por la potencia, conocida la base y el exponente; la radicación busca la base, dada la potencia y el exponente y, finalmente, la logaritmación trata de hallar el exponente cuando se conocen la potencia y la base.

Si bien es cierto que los términos de cada operación reciben un nombre diferente, la figura busca ilustrar la forma como se deben comprender estas operaciones tomando como base la poteciación, ya que es una operación que se puede evaluar aplicando la definición de la misma (definición 2.1); mientras que en el caso de las otras dos operaciones puede resultar complicado de establecer la respuesta bajo ciertas combinaciones de los valores a, b y n.

Definición 4.1 Logaritmación

Sean a, b y n reales, con a y b mayores que 0 y $a \neq 1$, se define $\log_a b$ así

$$\log_b a = n \text{ si y solamente si } b^n = a$$

En el logaritmo: b es la base, a el argumento y n el logaritmo

La expresión $\log_b a$ se lee *Logaritmo en base b de a* y para determinar su valor sin usar calculadora es necesario apoyarse en la potenciación, como lo muestra el ejemplo que sigue.

Ejemplo 4.1 –Cálculo de un logaritmo

Calcular logaritmo en base 5 de 125 simbólicamente $\log_5 125$
Se busca un número n tal que 5^n sea 125; de nuevo descomponer en factores primos a 125 es útil para determinar la respuesta, $125 = 5^3$.
Ahora, nuevamente, se pregunta por un número n tal que 5^n sea 5^3, simbólicamente es $5^n = 5^3$, con lo cual resulta evidente que el logaritmo es $n = 3$

4.2 Cálculo de logaritmos

El ejercicio precedente muestra un procedimiento que permite evaluar numerosos ejercicios en los cuales hay que calcular un logaritmo, es descomponer en factores tanto el argumento como la base, de forma que ambos números queden expresados como potencia de un mismo número. El siguiente ejemplo presenta una estrategia de simplificación de logaritmos.

Ejemplo 4.2 –Cálculo de un logaritmo

Calcular $\log_{225} 15$

$\log_{225} 15$	Ejercicio dado
$\log_{225} 15 = x$	Se supone que el logaritmo es x
$\log_{15^2} 15 = x$	Se descompone la base 225 como 15^2
$(15^2)^x = 15$	Se aplica la definición de logaritmo
$15^{2x} = 15$	Se aplica potencia de una potencia
$2x = 1$	Si las bases son iguales, los exponentes deben ser iguales
$x = \frac{1}{2}$	Se resuelve para x, que representa el valor del logaritmo pedido

Note que la descomposición de la base fue $225 = 15^2$ y no la descomposición en factores primos $225 = 3^2 \cdot 5^2$, ya que como se mencionó anteriormente, esta estrategia se basa en expresar la base y el argumento como potencias de una misma base, por tal motivo resulta más conveniente la primera descomposición.

Hay ejercicios en los cuales se requiere establecer la base, conocido el logaritmo y el argumento, como en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 4.3 –Cálculo de la base en un logaritmo

Calcular la base b si $\log_b 49 = 2$

$\log_b 49 = 2$	Ejercicio dado
$b^2 = 49$	Se aplica de la definición de logaritmo
$b^2 = 7^2$	Se descompone 49 como 7^2
$b = 7$	Si los exponentes son iguales, las bases deben ser iguales y se obtiene la respuesta $b = 7$

Se expone ahora cómo calcular el argumento de un logaritmo, dada la base y valor del mismo.

Ejemplo 4.4 –Cálculo del argumento de un logaritmo

Calcular el argumento a si $\log_3 a = -4$

$\log_3 a = -4$	Ejercicio dado
$3^{-4} = a$	Se aplica la definición de logaritmo
$a = \frac{1}{3^4}$	Se aplican las propiedades de los exponentes
$a = \frac{1}{81}$	Efectuando las operación indicada se obtiene que la base a es $\frac{1}{81}$

La logaritmación no es una operación clausurativa, es decir, dada una base a y una potencia b no siempre existe un exponente n tal que $\log_a b = n$; se ilustra esta situación con un ejemplo.

Ejemplo 4.5 –Cálculo de un logaritmo sin solución real

Calcular el logaritmo en base 3 de -9 es decir $\log_3 -9$
Se requiere un número n tal que 3^n sea -9; NO se puede expresar -9 en base 3, ya que $(-3)^2 = 9$ y $(3)^2 = 9$, por tanto no es posible expresar -9 como una potencia de 3, así que $\log_3 -9$ no existe en los reales.

El logaritmo planteado no cumple con las restricciones dadas en la definición de logaritmo, pero justamente se quiere ilustrar la imposibilidad de su cálculo.

Como una consecuencia de las propiedades de la potenciación y la definición de logaritmación, se presentan las siguientes definiciones que permiten evaluar logaritmos de forma rápida.

Definición 4.2 Definiciones de logaritmos

Sean a y x reales, con a y x mayores que 0 y $a \neq 1$, se define que:

1).	$\log_a 1 = 0$	ya que $a^0 = 1$
2).	$\log_a a = 1$	pues $a^1 = a$
3).	$\log_a a^x = x$	debido a que $a^x = a^x$
4).	$a^{\log_a x} = x$	Al usar la definición de logaritmo se obtiene $\log_a x = \log_a x$

En la definición, el literal 4, se usó la definición de logaritmo de derecha a izquierda, es decir, se expresa la potenciación como un logaritmo.

4.3 Leyes de los logaritmos

Se listan ahora tres propiedades o leyes de los logaritmos que son de uso frecuente cuando se está simplificando una expresión.

Propiedad 4.1 Propiedades de los logaritmos

1). Log. de un producto	$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$	Es igual a la suma de los logaritmos
2). Log. de un cociente	$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$	Es igual a la diferencia entre los logaritmos de M y N
3). Log. de una potencia	$\log_a M^c = c \log_a M$	Es igual al producto del exponente por el log. de la base

Las propiedades son igualdades que son verdaderas, bien sea que se apliquen en una dirección u otra. Los ejemplos que siguen presentan la forma como se pueden emplear estas propiedades con el objeto de calcular el valor de un logaritmo.

Ejemplo 4.6 –Cálculo de un logaritmo empleando las propiedades

Calcular $\log_2 \frac{1}{16}$

$\log_2 \frac{1}{16}$	Ejercicio dado
$\log_2 1 - \log_2 16$	Se aplica la propiedad logaritmo de un cociente
$0 - \log_2 2^4$	Se aplica la definición 4.2 literal 1, $\log_2 1 = 0$, y descomponer 16 como 2^4
$-4 \log_2 2$	Se aplica la propiedad logaritmo de una potencia
$-4(1)$	Se aplica la definición 4.2 literal 2, $\log_2 2 = 1$
-4	Se obtiene que $\log_2 \frac{1}{16} = -4$

Como se ha planteado anteriormente, existen diferentes formas de dar solución a un ejercicio, lo cual depende de la forma y el orden en que se apliquen las propiedades. El ejemplo anterior se puede solucionar así: suponemos que $\log_2 \frac{1}{16} = x$, hay que expresar el argumento y la base como una potencia del mismo número, así que expresamos $\frac{1}{16}$ como $\frac{1}{2^4}$ y ahora como 2^{-4}. La expresión inicial es $\log_2 2^{-4} = x$ que usando la definición de logaritmo se puede escribir $2^x = 2^{-4}$, si las bases son iguales, los exponentes son iguales, por tanto $x = -4$ como en el ejemplo anterior.

Ejemplo 4.7 –Cálculo de un logaritmo empleando las propiedades

Determinar el valor de $\log_6 4 + \log_6 9$

$\log_6 4 + \log_6 9$	Ejercicio dado
$\log_6 [4 \cdot 6]$	Se aplica la propiedad logaritmo de un producto
$\log_6 36$	Se efectua la operación indicada
$\log_6 6^2$	Se descompone 36 como una potencia de 6
$2 \log_6 6$	Se aplica propiedad logaritmo de una potencia
2	Ya que $\log_6 6 = 1$ por la definición 4.2 literal 2

Nótese que en el paso 2 se aplicó la propiedad logaritmo de un producto de derecha a izquierda, es decir, expresando la suma como un producto. Las tres propiedades anteriores se usan con mucha frecuencia en los procedimientos

que involucran logaritmos y se retoman en secciones posteriores de este libro.

Se han evaluado logaritmos con diferentes bases, vamos ahora a definir dos logaritmos que son de uso frecuente en las matemáticas aplicadas, estos son los logaritmos decimales y neperianos o en base e.

Definición 4.3 Logaritmos decimales y neperianos

Sea a un real positivo, se definen dos logaritmos especiales así

Logaritmo decimal	Logaritmo neperiano o en base e
$\log_{10} a = \log a$	$\log_e a = \ln a$

La definición expresa que cuando se presente un ejercicio como $\log 100$, este tendrá base 10, al igual que $\ln 81$ tendrá base e.

Ejemplo 4.8 –Cálculo de un logaritmo decimal

Calcular $\log 100$

$\log 100$	Ejercicio dado
$\log 10^2$	Se descompone 100 en base diez como 10^2
$2 \log 10$	Se aplica la propiedad logaritmo de una potencia
2	Ya que por definición $\log_{10} 10$ es 1

Cuando no se puede determinar un logaritmo haciendo uso de las propiedades, en razón a que los números a, b y n no lo permiten, se puede emplear una calculadora de bolsillo. Hay en el mercado un gran número de marcas y modelos, sin embargo, las calculadoras casio son las más populares. De los modelos que se encuentran en el mercado hay dos series, una es $fx \cdots ES$ y otra $fx \cdots MS$. La primera serie posibilita hacer cálculos aritméticos y presentar los resultados en forma simbólica, ademas se pueden realizar operaciones con logaritmos en cualquier base. La serie $fx \cdots MS$ sólo permite realizar cálculos de logaritmos decimales y neperianos. Esto significa que en una calculadora de la serie $fx \cdots MS$, no se puede evaluar $\log_2 9$. Para realizar este cálculo, vamos a recurrir a un procedimiento llamado cambio de base, este procedimiento se formaliza en la siguiente propiedad.

Propiedad 4.2 Fórmula de cambio de base

Sean a, p y b reales positivos con a, p diferentes de 1, el $\log_a b$ se puede cambiar a una base arbitraria p aplicando la siguiente fórmula

$$\log_a b = \frac{\log_p b}{\log_p a}$$

Ejemplo 4.9 –Cambio de base de un logaritmo

Cambiar la base de $\log_2 64$ a 8

Identificamos en el ejercicio dado que $a = 2$, $p = 8$ y $b = 64$, por tanto se puede escribir que $\log_2 64 = \frac{\log_8 64}{\log_8 2}$, como se pedía.

4.4 Simplificación de productos y cocientes de logaritmos.

Ejemplo 4.10

Evaluar $\dfrac{\log_8 64 \cdot \log_4 16}{\log_{12} 144}$

$\dfrac{\log_8 64 \cdot \log_4 16}{\log_{12} 144}$	Ejercicio dado
$\dfrac{\log_8 8^2 \cdot \log_4 4^2}{\log_{12} 12^2}$	Se expresa el argumento y la base en función del mismo número, si es posible
$\dfrac{2 \cdot \not{2}}{\not{2}}$	Se aplica la definición $\log_a a^x = x$
2	Se simplifica la fracción

Para la base 8 y el argumento 64, el número común es 8, así que se formula que $64 = 8^2$; se procede igual con las demás parejas.

4.5 Polinomios aritméticos con potencias, radicales y logaritmos

Lo fundamental cuando se está simplificando una expresión que contiene varias de las siete operaciones básicas, es ir efectuando cada una de las operaciones indicadas. Se ejemplifica este procedimiento a continuación.

Ejemplo 4.11

Calcular $\log_{121} 11 - \sqrt{36} \cdot 4^{-1} + \left(\dfrac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$

$\log_{121} 11 - \sqrt{36} \cdot 4^{-1} + \left(\dfrac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$	Ejercicio dado
$\log_{11^2} 11 - \sqrt{6^2} \cdot \dfrac{1}{4} + \left(\dfrac{1}{2^3}\right)^{-\frac{1}{3}}$	121 se expresa en base 11, 4^{-1} es $\frac{1}{4}$ y descomponemos en factores 36 y 8
$\dfrac{1}{2} - 6 \cdot \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2^{-1}}$	Se simplifica el logaritmo, la raíz y la potenciación
$\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2} + 2$	Se hace el producto y se reescribe $\dfrac{1}{2^{-1}}$ con exponente positivo
$\dfrac{1-3+4}{2}$	Se realiza la suma de las fracciones calculando el denominador común
$\dfrac{2}{2} = 1$	Resultado luego de simplificar la fracción

En el ejemplo se aprecia que las primeras operaciones realizadas fueron las operaciones unitarias, es decir la radicación, logaritmación y potenciación; las operaciones binarias, adición y sustracción, se calcularon al final. Las operaciones radicación, logaritmación y potenciación se clasifican como unitarias, en razón a que se aplican a un solo número real, en tanto que las operaciones adición, sustracción, multiplicación y división son binarias, ya que requieren de dos números.

4.6 Ejercicios del capítulo

Resumen.

1. Concepto de logaritmación.
2. Leyes de los logaritmos.
3. Simplificación de polinomios aritméticos.

Ejercicio 4.1

Aplicación de las leyes de los logaritmos

Calcular los siguientes logaritmos.

1. $\log_3 27$
2. $\log_{\frac{1}{4}} 4$
3. $\log_{10} 1000$
4. $\log_2 \frac{1}{16}$
5. $\log_{10} 100$
6. $\log_2 16$
7. $\log_3 81$
8. $\log_9 3$
9. $\log_7 7$
10. $\log_{10} 1$
11. $\log_2 64$
12. $\log_4 256$
13. $\log_7 \frac{1}{49}$
14. $\log_{36} 216$
15. $\log_{\frac{1}{3}} 9$
16. $\log_{\frac{1}{3}} 81$
17. $\log_2 8$
18. $\log_2 \frac{1}{16}$
19. $\log_2 \frac{1}{32}$
20. $\log_{32} 8$
21. $\log_{\frac{1}{4}} 64$
22. $\log_5 25$
23. $\log_5 \frac{1}{125}$
24. $\log_8 4$
25. $\log_{81} 27$
26. $\log_{\frac{1}{2}} 16$
27. $\log_2 8$
28. $\log_3 81$
29. $\log_5 25$
30. $\log_7 343$
31. $\log_9 27$
32. $\log_{16} 8$
33. $\log_{25} 125$
34. $\log_{32} 8$

Determinar cuál es el argumento en los siguientes logaritmos, para que la igualdad se cumpla.

35. $\log_2 N = 3$
36. $\log_5 N = 2$
37. $\log_3 N = 4$
38. $\log_2 N = 5$
39. $\log_{27} N = \frac{2}{3}$
40. $\log_{16} N = \frac{3}{4}$
41. $\log_9 N = \frac{3}{2}$
42. $\log_{64} N = \frac{4}{3}$

Establecer cuál es la base en los siguientes logaritmos, para que la igualdad se cumpla.

43. $\log_b 25 = 2$
44. $\log_b 81 = 4$
45. $\log_b 32 = 5$
46. $\log_b 216 = 3$
47. $\log_b 4 = \frac{2}{3}$
48. $\log_b 27 = \frac{3}{2}$
49. $\log_b 32 = \frac{5}{6}$
50. $\log_b 27 = \frac{3}{4}$
51. $\log_{b^6} b^4$
52. $\log_{b^{\frac{3}{5}}} b^6$

Reescribir como un solo logaritmo

53. $\log 2 - \log 3 + \log 5$

54. $3\log 2 - 4\log 3 + \frac{1}{2}(\log 25) - \frac{1}{3}(\log 64) + \frac{2}{3}(\log 27)$

55. $\log 32 + 3\log 24 - 4\log\sqrt[3]{8} - 3\log\sqrt[3]{125} + \log\sqrt[3]{729}$

56. $\log_3 13 + \log_3 7 + \log_3 2 - 2\log_3 3$

57. $\log_5 (4^2-1)^{\frac{1}{2}} + \log_5 (4+4) - \left(\frac{3}{2}\right)\log_5 (4^2-1)$

58. $\frac{1}{2}\log_2 (8+1) + \frac{3}{4}\log_2 (12-1) - \frac{1}{2}\log_2 (8-1)$

59. $\frac{1}{2}(\log_7 25) - \frac{1}{3}(\log_7 64) + \frac{1}{3}(\log_7 27) + \log_7 \frac{7}{2} - 2\log_7 \frac{1}{49} + \log_7 \frac{1}{7}$

4.7 Respuestas a los ejercicios del capítulo

1. 3
2. -1
3. 3
4. -4
5. 2
6. 4
7. 4
8. $\frac{1}{2}$
9. 1
10. 0
11. 6
12. 4
13. -2
14. $\frac{3}{2}$
15. -2
16. -4
17. 3
18. -4
19. -5
20. $\frac{3}{5}$
21. -3
22. 2
23. -3
24. $\frac{2}{3}$
25. $\frac{3}{4}$
26. -4
27. $L = 3$
28. $L = 4$
29. $L = 2$
30. $L = 3$
31. $L = \frac{3}{2}$
32. $L = \frac{3}{4}$
33. $L = \frac{3}{2}$
34. $L = \frac{3}{5}$
35. $N = 8$
36. $N = 25$
37. $N = 81$
38. $N = 32$
39. $N = 9$
40. $N = 8$
41. $N = 27$
42. $N = 2^8$
43. $b = 5$
44. $b = 3$
45. $b = 2$
46. $b = 6$
47. $b = 28^3$
48. $b = 3^2$
49. $b = 2^6$
50. $b = 3^4$
51. $\frac{2}{3}$
52. 10
53. $\log \frac{10}{3}$
54. $\log \frac{10}{9}$
55. $\log \frac{2^{10}3^5}{5^3}$
56. $\log_3 \frac{2\cdot 7\cdot 13}{9}$
57. $\log_5 \frac{8}{15}$
58. $\log_2 \frac{3\sqrt[4]{11}}{\sqrt{7}}$
59. $\log_7 \frac{3\cdot 5\cdot 7^4}{8}$

5 Razones y proporciones

5.1 Razones y proporciones

Este es el último capítulo del texto, en el cual se quiere proporcionar material y estrategías para efectuar cálculos y resolver problemas aritméticos; las razones y proporciones permiten presentar una de las aplicaciones más importantes de la aritmética y quizá de la matemática que toda persona debe dominar: la regla de tres. Primero se enuncia conceptualmente qué es una razón y una proporción.

Definición 5.1 Razón

La razón entre las cantidades a y b es el resultado de comparar cuántas veces contiene una a la otra, simbólicamente se escribe $\frac{a}{b}$ o $\frac{b}{a}$

Ejemplo 5.1 –Cálculo de una razón

La razón de 20 a 5, que se lee "*Veinte es a Cinco*", se calcula dividiendo 20 entre 5, es decir $\frac{20}{5} = 4$

Definición 5.2 Proporción

Dadas las razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, una proporción es la igualdad entre dos razones así

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ y se lee "} a \text{ es a } b \text{ como } c \text{ es a } d\text{"}$$

Los valores a, b, c y d se llaman términos de la proporción, a y d son los extremos, b y c los medios.

Para poder establecer una proporción, se debe cumplir que las razones tengan igual valor; el ejemplo aclara esta idea.

Ejemplo 5.2 –Proporción: igualdad de dos razones

Las razones $\frac{40}{20}$ y $\frac{18}{9}$, son proporcionales ya que en ambos casos se obtiene 2, por tanto se escribe $\frac{40}{20} = \frac{18}{19}$

5.2 Regla de tres

Definición 5.3 Regla de tres

La Regla de tres es un procedimiento en el cual se busca uno de los términos de una proporción, dados los otros tres.

La regla de tres se aplica en problemas donde interviene magnitudes; una magnitud es una propiedad física o medible de un cuerpo u objeto; el peso, longitud, altura, volumen, tiempo, valor, cantidad, etc, son ejemplos de magnitudes.

Definición 5.4 Regla de tres simple

Cuando sólo intervienen dos magnitudes, se dice que es una regla de tres simple.

Ejemplo 5.3 –Regla de tres simple

Dos pasajes para el metro cuestan 3,500 pesos, ¿cuánto cuestan 10?

El ejemplo plantea dos magnitudes, el precio y la cantidad. Estas magnitudes se expresan como una proporción de la siguiente manera: $\frac{3500 \text{ pesos}}{2 \text{ pasajes}} = \frac{x \text{ pesos}}{10 \text{ pasajes}}$, si se soluciona para x tenemos que x pesos $= 3500$ pesos $\cdot \frac{10 \text{ pasajes}}{2 \text{ pasajes}}$, simplificamos la fracción para obtener que x pesos $= 3500$ pesos $\cdot 5$.

Hay que notar que el valor desconocido x con relación al valor inicial dado de 3500 pesos, es mayor; por ese motivo el factor que resulta del cociente entre las cantidades, multiplica por 5 veces el precio inicial dado.

Este hecho constituye la esencia del procedimiento que se emplea para resolver una regla de tres, y es establecer por qué factor hay que multiplicar la cantidad desconocida x; la cual con relación a la cantidad inicial dada puede ser mayor o menor que ella. Los ejemplos están pensados para aclarar este procedimiento.

Definición 5.5 Regla de tres compuesta

Cuando intervienen más de dos magnitudes, se dice que es una regla de tres compuesta.

En el siguiente problema se plantean tres magnitudes: horas, días y ganancia.

Ejemplo 5.4 –Regla de tres compuesta

Una persona trabaja 8 horas diarias por 5 días a la semana y gana 400,000 pesos, ¿cuánto ganará si trabaja 10 horas diarias por 6 días a la semana?

Se resuelven a continuación una serie de problemas para ilustrar cómo funciona el método del factor, que es general para cualquier regla de tres, sea simple o compuesta.

Ejemplo 5.5 –Solución de una regla de tres simple

Dos pasajes para el metro cuestan 3500 pesos, ¿Cuánto cuestan 10?

Pesos	Cantidad
3500	2
x	10

Para obtener x hay que multiplicar 3500 por un factor que depende de la siguiente pregunta
Si 2 pasajes cuestan 3500, entonces 10 pasajes ¿cuestan más o menos?
Naturalmente hay que pagar más por más pasajes, así que se plantea que $x = 3500 \cdot \frac{10}{2} = 17500$
Respuesta: 10 pasajes cuestan 17,500 pesos

Ejemplo 5.6 –Solución de una regla de tres compuesta

Una persona trabaja 8 horas diarias por 5 días a la semana y gana 400,000 pesos, ¿Cuánto ganará si trabaja 10 horas diarias por 2 días a la semana?

Ganancia	Horas	Días
400000	8	5
x	10	2

Se multiplica 400000 por dos factores según la siguiente lógica
Por trabajar 8 horas gana 400000, entonces por 10 ¿gana más o menos?, como gana más, multiplicamos por $\frac{10}{8}$
Por trabajar 5 días gana 400000, entonces por 2 ¿gana más o menos?, como gana menos, se multiplica por $\frac{2}{5}$
$x = 400000 \cdot \frac{10}{8} \cdot \frac{2}{5} = 200000$, la respuesta es que gana 200000 pesos

En este ejemplo se aprecia que hay relaciones entre las magnitudes *directas* o *inversas*, así por ejemplo las magnitudes horas y salario son directamente proporcionales, ya que al aumentar una la otra también aumenta. Veamos un ejemplo donde la relación entre dos magnitudes sea inversa.

Ejemplo 5.7 –Solución de una regla de tres inversamente Proporcional

En una finca hay alimento para 7 vacas que dura 78 días, ¿Cuántos días duraría el alimento para 21 vacas?

Días	Vacas
78	7
x	21

Se multiplica 7 por un factor según el siguiente análisis
Si el alimento para 7 vacas dura 78 días, el alimento para 21 vacas ¿dura más o menos?, como dura menos, se multiplica por $\frac{7}{21}$
$x = 78 \cdot \frac{7}{21} = 26$, la respuesta es que alcanza para 26 días

En este caso, las magnitudes días y número de vacas son inversamente proporcionales, pues con un mayor número de vacas se reduce la cantidad de días de alimento, bajo el supuesto de que este permanece constante.

El análisis que se hace para dar solución a una reglas de tres, se funda en establecer cómo se comportan estas magnitudes. En los ejemplos se han esquematizado las reglas de tres en una tabla que tiene tantas columnas como

magnitudes trae el problema y cuenta con dos filas; lo usual es que en la columna donde se localiza la cantidad desconocida x, hay un valor dado en el problema el cual se multiplica por un factor, según las magnitudes sean directas o inversas.

Ejemplo 5.8 –Solución de una regla de tres compuesta

Tres personas traban juntas 8 horas diarias durante 10 días en la construcción de una cancha de 80 metros cuadrados de área. ¿Cuántos días necesitarán 5 personas, trabajando 6 horas diarias, para hacer una cancha de iguales características pero con 60 metros de área?

Días	Horas	Personas	Área
10	8	3	80
x	6	5	60

Lo esencial es determinar los factores por los cuales hay que multiplicar a 10 días.
Se hace el análisis separadamente entre la columna días y cada una de las otras columnas.
Si trabajando 8 horas se demoran 10 días, trabajando 6 ¿se demoran más o menos?, pues a menos horas mas días, por tanto se multiplica por $\frac{8}{6}$
Si 3 personas se demoran 10 días, 5 personas ¿se demoran más o menos?, a más personas menos días, significa que se multiplica por $\frac{3}{5}$
Si para hacer 80 metros tardan 10 días, para 60 ¿tardan más o menos?, a menos área, menos días, por lo tanto se multiplica por $\frac{60}{80}$, es decir el cálculo es
$x = 10 \cdot \frac{8}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{60}{80} = 6$ días.

Cada una de las tres preguntas en el razonamiento anterior, se formula de manera independiente con relación a la columna que contiene la magnitud buscada. En primer lugar se comienza identificando la relación existente entre los datos conocidos para luego formular la pregunta de la relación que hay entre la incógnita y el dato conocido. Nótese que en el ejemplo se analiza la relación entre las 8 horas y los 10 días, para luego ver cómo es la relación existente entre los días, que es la incógnita x, y las 6 horas.

Para finalizar se enfatiza que si la incógnita x es mayor con relación al dato conocido, se multiplica por el cociente entre el mayor y el menor; pero, si x es menor, se multiplica por el cociente del menor sobre el mayor.

Procedimiento 5.1 Esquema de la solución de una regla de tres

Magnitud 1	Magnitud 2
Valor dado k	Valor *mayor* M
x	Valor *menor* m

La incógnita x se iguala al valor dado ($x = k$), el cual se multiplica por un factor según la siguiente lógica[1]
1). Si x es mayor que el valor dado, entonces se multiplica por el *mayor* y divide por el *menor*: $x = k \cdot \frac{M}{m}$
2). Si x es menor que el valor dado, entonces se multiplica por el *menor* y divide por el *mayor*: $x = k \cdot \frac{m}{M}$

Para determinar si x es mayor o menor con relación al valor dado k, se debe elaborar el argumento tal y como se ha explicado en los ejemplos precedentes, en los cuales se interpretan los valores en su conjunto, comenzando por la columna de la cual se conocen todas las cantidades, y finalizando con la columna de magnitudes que contiene la incógnita x. Hay que anotar que para la elaboración de la pregunta se considera la magnitud relacionada con la cantidad buscada, así como lo presenta el ejemplo (5.8), en el cual se determina el número de días, así que todas las

[1]Cuando se suponen los valores *mayor* y *menor*, en general el procedimiento funciona si se intercambian estas cantidades

preguntas consideran esta magnitud cuando se usa la expresión "...tardan más o menos..." o "... se demoran más o menos...". De la claridad del planteamiento de esta pregunta, depende la exactitud de la respuesta. Para dominar el procedimiento definido, se deben leer los ejemplos de este texto en los cuales se aplicó este esquema de forma sistemática.[2]

5.3 Ejercicios del capítulo

Aplicando los conceptos de razones y proporcionalidad, resolver los siguientes problemas.[3]

1. Al comprar una casa en cuotas (dividendos) el banco ofreció un crédito de 12 años con cuotas fijas mensuales de $100.000. Si el precio al contado de la casa es de 10 millones, ¿cuál es el porcentaje de recargo que aplica el banco?

2. Si el precio de un curso de inglés es de $300.000 al contado, pero pagado al crédito se recarga en un 18% y el crédito es de 6 meses, ¿cuál es el valor de las cuotas si son todas de igual valor?

3. Un grupo de personas asiste a un concierto de música donde se hace rebaja de un 10% por cada 5 entradas. Si una persona junta a 14 personas más y cada entrada individual sale a $5000, ¿cuál es el valor de cada entrada con la rebaja?

4. Si un pintor puede trabajar 8 horas diarias en pintar la totalidad de una casa y su jefe decide contratar a 3 pintores más que tienen la misma capacidad de trabajo, ¿cuánto tiempo tardarán en pintar una docena de casas trabajando 8 horas diarias?

5. En un estacionamiento hay 80 autos estacionados. Si el color de ellos se reparte en 3 tipos: 30% son blancos, el 75% de los que quedan son verdes y el resto son rojos, ¿cuántos autos son blancos y rojos?

6. Una cuadrilla de trabajadores fabrica 1 casa en 4 meses, entonces, si tenemos 2 cuadrillas de trabajadores, en 1 año alcanzan a fabricar:

7. Un atleta recorre 40 Km en 2 horas. Entonces ¿a qué distancia se encuentra cuando ha recorrido media hora de camino?

8. En un cajón de naranjas y plátanos están en la proporción 3 : 2 ¿cuál es la cantidad de naranjas, si el total de frutas que hay entre las dos es 200?

9. A las 12 del mediodía Pedro observó que su reloj tenía un atraso de una hora 40 minutos, y en ese instante lo regula de manera que se adelante 3 minutos por día. ¿En qué tiempo, a partir de ese momento, su reloj marcará la hora exacta?

10. Las edades de 2 personas están en relación 1 : 2 y en 5 años más estarán en la razón 2 : 3. ¿Cuál era la suma de las edades de las personas hace 2 años?

11. El punto más alto de una antena ubicada sobre un edificio se encuentra a 60 m del suelo del subterráneo. Si la distancia desde el suelo del subterráneo a la base de la antena es 4 veces el tamaño de la antena si todos los pisos tienen la misma altura (2 metros) incluso el subterráneo, ¿cuántos pisos tiene el edificio desde el suelo?

12. En un curso hay 30 alumnos, de estos el 20% son buenos alumnos y del resto la mitad tiene un promedio de notas igual a 5 y de los que quedan el 50% está repitiendo el examen. Si al final del año pierden 3 alumnos, ¿con relación a los que repitieron el examen qué porcentaje perdio el año?

13. Al echar 36 litros en un barril se completan los 3/7 de su capacidad ¿cuántos litros faltan para llenar el barril?

14. Cuatro veces la edad de Claudia excede a la edad de Ana en 20 años y la tercera parte de la edad de Ana es menor que la de Claudia en 2 años. ¿Cuántos años tiene Claudia?

15. En la universidad uno de los requisitos para aprobar una asignatura es tener asistencia igual o superior al 85%. Si el semestre tiene 48 clases, para no reprobar la asignatura ¿a cuántas clases se puede faltar?

16. Un artículo cuyo precio es $1.500 se vende en oferta rebajando el 3%. ¿Cuánto paga una persona por 7 de estos artículos?

17. El precio de una mercadería sube 50% y luego baja 50%. El precio de venta inicial en relación al precio de venta final:

[2] Hay diversos esquemas para resolver reglas de tres, el lector puede usar cualesquiera, lo importante es efectuar las operaciones correctamente.
[3] El nombre que reciben este tipo de ejercicios sobre razones y proporciones es el de *reglas de tres*.

18. Una secretaria escribe 15 certificados en 4 horas ¿Cuánto tiempo demorarán 6 secretarias en escribir 90 certificados?

19. Tres amigos A, B y C, deciden repartirse una caja de bolitas. A recibe el 34% del total, B el 20% y C se quedó con 23. ¿Cuántas bolitas tenía la caja?

20. Si del 30% de $x obtengo $z y del 10% de z resultan $30, entonces el 200% de x es:

21. Los 3/4 de la mitad de un número representa el:

22. El 20% de B más el 25% de A es 7. El doble del 50% del 20% de B es 5. ¿Cuál es el valor de la mitad de A?

23. Se pagan $1.500 que corresponden a los 3/5 de una deuda. Entonces, por pagar quedan:

24. El 18% de los alumnos de un curso faltaba por enfermedad y el 8% por reuniones de cualquier tipo. Si sólo asistían 37 alumnos, los que faltaban eran:

25. ¿De qué número 8 es el 25%?

26. Un edificio tiene 40 ventanas iguales. Cada ventana está compuesta por 3 vidrios iguales, 2 fijos y un tercero movible. Cada ventana tiene un costo de $P, pero 2 vidrios fijos valen lo mismo que un vidrio móvil. ¿Cuánto vale una ventana en función de los vidrios fijos? Nota: F es el precio de un vidrio fijo.

27. Las existencias de avena llegan para 7 caballos hasta 78 días. ¿Cuántos días alcanzan las existencias para 21 caballos?

28. Si en un viaje de estudios van 40 alumnos, el precio de su pasaje es de $1875. Pero, si sólo van 25 alumnos, ¿cuál será el precio que pagaría cada uno de estos 25 alumnos si el valor del viaje para el grupo no varía?

29. En la frutería venden fruta sin semilla y con semilla. Si las frutas con carozo son el triple de las que no lo tienen y el total de frutas en el negocio son 120, ¿cuántas frutas no poseen carozo?

30. Un cálculo de porcentaje se puede representar como una proporción directa, entonces, ¿cuál es el 250% de una cantidad q?

31. Si compro un cd ahora, costará 25% más de lo que costaba hace dos semanas. Si subió $2000 por semana, ¿cuánto costaba el cd hace 2 semanas?

32. Un árbol da 20 cajas de fruta cada 10 meses en promedio. Si este año produjo cada 5 meses, 16 cajas de fruta, ¿en qué porcentaje aumentó su producción?

33. Con p pesos compro q abrigos. ¿Cuánto cuestan 7 abrigos?

34. En una planta conservera se necesitan N tomates para producir 10 tarros de salsa de tomate. Si se recibe un pedido de 500 cajas de tarros de salsa, dado que cada caja tiene 30 tarros, ¿de cuántos tomates se debe disponer para un mes, si llegan 2 pedidos semanales y ese mes tiene 5 semanas?

35. ¿Cuál fue el precio de venta de un artículo cuyo precio de costo fue de 6.000 y la ganancia fue del 33,3% del precio de venta?

36. El precio de un libro L se vende con un descuento D que corresponde al 18% del precio de compra. Si la ganancia determinada por el comerciante fue de 30% sobre el precio de compra, ¿cuál es el porcentaje real de ganancias del comerciante?

37. Para preparar un kilo de mermelada se ocupa medio kilogramo de azúcar y 600 gramos de fruta. ¿Qué cantidad de fruta y azúcar se necesitan para fabricar 50 kilogramos de mermelada?

38. Al naufragar un barco con 100 personas a bordo, un reporte sobre dicho suceso indica lo siguiente: de los sobrevivientes, la onceava parte son niños y de los muertos la quinta parte eran casados. ¿Cuántas personas murieron?

39. Calcular el 30% de los alumnos de un curso si en él existe el doble de mujeres que de hombres y los hombres son una decena.

40. ¿Cuál es el porcentaje de damas que hay en un curso, cuando el total de alumnos de un curso es el 75% del 10% de 1000 y de ellos 20% son varones?

41. Si Jaime recorre una distancia de 48 km, en donde primero recorre un tercio en auto y del resto los dos novenos los hace en bicicleta, luego camina, hasta finalizar su trayecto, ¿cuántos km recorre en bicicleta?

42. Diez cajones llenos de nueces pesan 410 Kg y un cajón vacío pesa 10 Kg ¿Cuántos Kg pesan las nueces solas?

43. Un soldado raciona su agua para 10 días. Después de 4 días le dicen que se debe hacer alcanzar el agua para un total de 8 días. ¿En qué porcentaje debe disminuir su ración de agua?

44. Tomás perdió su empleo a tiempo parcial, lo que redujo las rentas de su pareja en un 20%. Su mujer Leticia decide efectuar horas suplementarias con el fin de compensar esta pérdida. ¿Por cuánto deberá multiplicar su salario con el fin de que la renta de la pareja vuelva a su nivel original?

45. Los balones de fútbol y de baloncesto de una escuela deportiva suman 40 en total. Se sabe que hay 2 balones de baloncesto por cada 3 balones de fútbol. ¿Cuántos hay de cada uno?

46. Si una pizza de 25 cm de diámetro vale $ 800, ¿Cuál será el precio en pesos de otra pizza con los mismos ingredientes y 35 cm de diámetro?

47. Un barco tiene provisiones para 20 días y 45 tripulantes pero, al emprender el viaje, se quedan en tierra 9 marineros. ¿Para cuantos días llegarán los víveres?

48. ¿Cuántos ladrillos serán necesarios para construir un pequeño muro macizo de 16 m de largo, 1 m de alto y 25 cm de ancho, si por cada metro cúbico de construcción se requieren (contando el mortero de unión) 1000 ladrillos?

49. Un salón mide 6 m de largo y 4 m de ancho. Se quiere embaldosar con baldosas cuadradas de 40 cm de lado. ¿Cuántas hacen falta?

50. Cuatro pintores de brocha gorda pintan una casa en 6 días. ¿Cuántos días demorarán 12 pintores en pintar la misma casa, si mantienen ese ritmo?

51. Si una determinada persona gastara $ 30 diarios le faltarían $ 100 para llegar al fin de un mes de 30 días sin deudas. ¿Cuánto puede gastar cada día para ahorrar $ 200 dicho mes?

52. Dos tercios de la facultad de una institución educativa son mujeres. Doce de los hombres de la facultad son solteros, mientras 3/5 de los profesores hombres están casados. El número total de miembros de la facultad de esa institución es:

53. Si en una caja caben 8 bolsas y en cada bolsa caben 15 bombones. ¿Cuántos bombones caben en 6 cajas?

54. A un dibujo se le toma una fotocopia que amplía 6 veces su tamaño, a esta fotocopia se le vuelve a tomar otra fotocopia que la amplía 4 veces. Si la altura del dibujo en el original mide 12cms. ¿Cuánto mide la altura del dibujo en la segunda fotocopia?

55. Una abeja reina puede vivir 43 veces más que las abejas trabajadoras. Si la abeja trabajadora vive 44 días, La abeja reina vive:

56. Una cuerda mide 80 cms de largo, se le corta un pedazo de una longitud igual a 1/4 de la longitud total de la cuerda. ¿Cuánto mide el pedazo que queda?

57. Un albañil tiene que embaldosar un salón de forma cuadrada que tiene de lado 8 m; si en cada metro cuadrado se utilizan 16 baldosas, ¿Cuántas baldosas son necesarias para cubrir todo el salón?

58. En una fábrica de botones se empaca de la siguiente forma: 4 botones se empacan en una bolsa de tela. 6 bolsas de tela llenas se empacan en una bolsa plástica. 5 bolsas plásticas llenas se empacan en una caja de cartón. 3 cajas de cartón se empacan en una caja de madera. La cantidad de cajas de cartón que se llenan con 4.320 botones es:

59. Sebastián leyó una noche 170 palabras por minuto, durante 15 minutos y otra noche leyó 155 palabras por minuto, durante 25 minutos. La primera noche ¿cuántas palabras leyó?

60. Un atleta da una vuelta a una pista atlética de un estadio en 1 minuto 15 segundos. Si su ritmo es constante, ¿Cuántas vueltas dará en una hora?

61. Alejandro tiene 5 sombreros menos que Isabel y Ángela tiene 3 veces más sombreros que Alejandro. Si Isabel tiene n sombreros, ¿Cuál de estas expresiones representa el número de sombreros que tiene Ángela? 5-3n; 3n-5; n-5; 3(n-5)

62. Un vehículo consume 3 galones de gasolina cada 100 kilómetros, si el galón cuesta $4.000 y se realiza un viaje de 200 kilómetros, el costo de la gasolina es de:

63. En una determinada población apareció una epidemia, si hace dos meses el 10% de la población tenía la enfermedad y un 90% gozaba de buena salud y en el transcurso de un mes, un 10% de las personas que estaban enfermas se curaron y el 10% de las que gozaban de buena salud se enfermaron. El porcentaje de la población que goza de buena salud hasta ese momento es:

64. Una pastilla de 20 gramos está compuesta de vitamina C, de hidratos de carbono, de proteínas y de sales minerales en la proporción: 2, 3, 4, 1 respectivamente ¿Qué cantidad contiene de proteínas?

65. Debido a la disminución de la mano de obra disponible, una fábrica de juguetes redujo su rendimiento mensual en 20%. ¿Cuál es el incremento porcentual necesario de mano de obra para estabilizar en forma normal el rendimiento?

66. En un grupo de 45 personas que asiste a una fiesta, se sabe que hay 3 niños por cada 2 niñas. El número de niñas que hay en la fiesta es:

67. Un departamento tenía 8 congresistas en 1940 y 6 en 1950. ¿El cambio porcentual en la representación es? 1) -75; 2)-25; 3)+25; 4)+75

5.4 Respuestas a los ejercicios del capítulo

1. 44%
2. $59.000
3. 4500
4. 3 días
5. 38
6. 6 casas
7. 10 km
8. 120
9. 33 días 8 horas
10. 11
11. 23
12. 50%
13. 48 litros
14. 14
15. 8 clases
16. $10.185
17. Baja 25%
18. 4 horas
19. 50
20. 2000
21. 37,5% del número
22. 4
23. $1.000
24. 13
25. 32
26. P 4F
27. 26 días
28. 3000
29. 30
30. 2,5q
31. 16000
32. 60%
33. 7p/q
34. 15.000N
35. 9000
36. 12% del precio de compra
37. 25 kg, 25 kg
38. 45
39. 9
40. 80%
41. 64/9 km
42. 310
43. 25%
44. 1.20
45. 16 de baloncesto y 24 de fútbol
46. $ 1568
47. 25
48. 4.000 ladrillos
49. 150
50. 2 días
51. 20

52. 90
53. 720
54. 288 cms
55. 1.892 días
56. 60 cms
57. 1024 baldosas
58. 12
59. 2.550 palabras
60. 48 vueltas
61. 3(n-5)
62. $ 24.000
63. 91 %
64. 8 gramos
65. 125
66. 27
67. -25

6 Problemas suplementarios

Los ejercicios presentados en este anexo, requieren un alto dominio conceptual y de procedimientos con relación a las competencias que se deben tener para dar solución a los ejercicios propuestos en los diversos capítulos. Estos problemas requieren no sólo del uso de la teoría, sino de buscar alternativas de solución poco rutinarias, incentivando la creatividad y recursividad al momento de buscar su solución, la cual puede ser poco común.

Determinar el valor de las siguientes expresiones.

1. $\sqrt{6\sqrt{6\sqrt{6\ldots}}}$
2. $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots}}}$
3. $\sqrt{12-\sqrt{12-\sqrt{12-\ldots}}}$
4. $\sqrt{2\sqrt[3]{2\sqrt{2\sqrt[3]{2\sqrt{2\sqrt[3]{2\ldots}}}}}}$
5. $\sqrt[3]{9\sqrt[3]{9\sqrt[3]{\ldots\sqrt[3]{9\sqrt[3]{27}}}}}$
6. $3^1\cdot 3^2\cdot 3^3\cdot 3^4\cdot\ldots\cdot 3^{14}\cdot 3^{15}$
7. $5^2 7^3 5^4 7^5 5^6 7^7$
8. $\dfrac{3^2 3^4 3^6\cdots 3^{18} 3^{20}}{3^1 3^3 3^5\cdots 3^{17} 3^{19}}$
9. $\sqrt[(\sqrt{2}-1)]{\left(\dfrac{3}{\sqrt[\sqrt{2}]{3}}\right)^{\sqrt{2}}}$

Simplificar las siguientes expresiones.

10. $\sqrt{6+\sqrt{6}+\sqrt{14}+\sqrt{21}}-\left(1+\sqrt{\dfrac{3}{2}}+\sqrt{\dfrac{7}{2}}\right)$
11. $\sqrt{3-4\sqrt{3}+4}$
12. $\sqrt{9-6\sqrt{11}+11}$
13. $\sqrt{7-2\sqrt{21}+3}$
14. $\sqrt{5+4\sqrt{10}+8}$
15. $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$
16. $\sqrt{7-2\sqrt{10}}$
17. $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$
18. $\sqrt{13-2\sqrt{42}}$
19. $\sqrt{17-12\sqrt{2}}$
20. $\sqrt{3-2\sqrt{2}}-\sqrt{7-4\sqrt{3}}-\sqrt{5-2\sqrt{6}}$

Verificar las siguientes igualdades.

21. $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=1$
Ayuda: expresar $2+\sqrt{5}$ como el binomio $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$ al cubo .

22. $\sqrt[3]{7+2\sqrt{5}}+\sqrt[3]{7-2\sqrt{5}}=2$

23. $\sqrt[3]{18+13\sqrt{5}}+\sqrt[3]{18-13\sqrt{5}}=3$

24. $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$

25. $\sqrt[3]{25+10\sqrt{5}}+\sqrt[3]{25-10\sqrt{5}}=5$

26. $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}-\sqrt[3]{5-\sqrt{52}}=\sqrt[3]{5+\sqrt{52}}-\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$

27. $\left(3\sqrt{\frac{2}{3}}-\sqrt{12}-\sqrt{6}\right)\left(\frac{2}{3}\sqrt{6}+2\sqrt{\frac{2}{3}}-4\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=0$

28. $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=3$

29. $\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}\right)=\sqrt{2}$

30. $\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}=1$

31. $\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{2+8\sqrt{6-4\sqrt{2}}}}=2$

32. $\sqrt[3]{72+32\sqrt{5}}-\sqrt[3]{72-32\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$

Resolver los siguientes problemas.

33. Un tablero cuadrado dividido en casillas blancas y negras(como el tablero de ajedrez), comienza con una casilla negra. La razón entre las casillas blancas y las casillas negras es aproximadamente de 0,96. ¿Cuáles son las dimensiones del tablero?

34. ¿Cuántas cajas con medidas de 0,1mx0,1mx6,9m pueden ser guardadas en un contenedor de 6mx3mx2m?

35. Un grupo de niños y perros salen a caminar. Se sabe que hay más perros que niños y que hay 49 pies y cabezas en total. ¿Cuántos perros hay?

36. Encontrar el entero positivo más pequeño que debe ser sumado a 2010 para obtener un cuadrado perfecto.

37. Un entero de dos dígitos es 4,5 veces más grande que el mismo número leído de derecha a izquierda. Encuentre el número.

38. Cuando Juana juega contra Camilo a su juego preferido, la probabilidad de que ella gane es 5 a 3. ¿Cuál es la probabilidad de que ella gane 3 juegos seguidos?

39. ¿Cuál es la suma de todos los dígitos de la representación decimal de $5^{16}x16^{5}$?

40. El último dígito del número 7^{77} es:

41. Encuentre la suma de los siguientes números: $1,2,4,8,16,32,64,...,1024$

42. Un burro tiene que transportar 900 zanahorias de un punto A a un punto B que están separados por una distancia de 300 millas; el burro puede cargar un máximo de 300 zanahorias, si el burro se come una zanahoria cada milla, ¿cuál es el máximo número de zanahorias que pueden llegar al punto B?

43. Si 3 estudiantes se comen 3 manzanas en 33 segundos y ellos no pueden porcionar ninguna manzana. ¿Cuánto tiempo tardarán 9 estudiantes en comerce 19 manzanas?

44. Si se tienen 220 lápices y se desean empacar en paquetes que contengan sólo 7 ó 9 lápices, el mínimo número de paquetes que se pueden formar para empacar todos los lápices es:

45. Con 185 personas se quieren formar equipos de estudio conformados solamente por 4 ó 9 personas. El número mínimo de equipos que pueden formarse es:

46. Con 185 personas se quieren formar equipos de estudio conformados solamente por 4 ó 9 personas. El número máximo de equipos que pueden formarse es:

47. En una población una persona cuenta un chisme a otras 5 personas en una hora; cada persona les cuenta el chisme a sólo 5 personas. Si una persona inicia un chisme, al cabo de 4 horas el número de personas que conocen el chisme es:

48. Andrés, Pacho y Claudia compraron cada uno bolsas de bizcochos idénticas. Andrés compró 35 bizcochos, Pacho 49 y Claudia 63. El total de bolsas compradas por los tres es:

49. Se tienen tres carpetas con 52, 78 y 104 procesos y se deben reorganizar con las siguientes condiciones: cada carpeta debe contener el mismo número de procesos.

Debe utilizar el mínimo número de carpetas posibles. El número de procesos que se deben ubicar por carpeta y el total de carpetas utilizadas es:

50. Tres amigos compraron zapatos idénticos; uno de ellos se los pone cada 3 días, otro cada 5 días y el otro sólo los viernes. Si ayer los tres estaban con los mismos zapatos, ¿en cuánto tiempo volverán a coincidir?

Se define la operación arbitraria entre los números reales p, q así $p|q = \frac{p^2}{4}(2q-3p)$

51. $4|2$ es igual a:

52. $A|A$ es igual a:

53. $8|B$ es igual a:

54. La suma de 5 pares consecutivos es 120; el número situado en el medio es:

55. El resultado de sumar $5^4+5^4+5^4+5^4+5^4$ es:

56. El máximo común divisor de dos números es 15; ¿cuál es el mayor de estos números, sabiendo que sólo uno es par, ambos números se descomponen en igual cantidad de factores primos y su mínimo común múltiplo es 1260?

57. Se requiere construir una columna de adobes de 240 cm de alto con adobes de 8 cm y 11 cm de alto cada uno. El número mínimo de adobes que se requieren para construir la columna es:

58. En un grupo de 5 vacas el promedio de peso es 430kg. La de menor peso tiene 412kg, esta será reemplazada por otra vaca de tal forma que el promedio de las 5 reses que queden sea 435kg; el peso de dicha vaca debe ser:

59. En una escuela cierto estudiante llegó contagiado con el virus X. Al finalizar el primer día el estudiante ha contagiado a 5 y él queda sano; para el final del segundo día, cada uno de los enfermos ha contagiado a 5, quedando ellos sanos y así indefinidamente. Al finalizar del cuarto día el número de estudiantes contagiados es:

60. Juan debe armar computadores durante 6 días, de tal forma que cada día debe ensamblar el triple del día anterior. Si el primer día ensambló 9 computadores, entonces la cantidad total de ordenadores que armó Juan es:

El concepto de operación es vital en las matemáticas, los ejercicios siguientes definen tipos especiales de operaciones, por medio de las operaciones aritméticas básicas y que se representan simbólicamente con algunos caracteres. Usando la definición en cada caso, realizar el cálculo que se pide.

61. Si $a^a = 3$

calcular: $A = \frac{(a^3)^a}{(a^2)^a}$

62. Si $x^x = 2$

calcular: $S = x^{x^2} + x^{x+x^2}$

63. Si:$a\#b = a^3+2a;\ b \in \mathbb{R}$

efectuar: $\underbrace{1\#(2\#(3\#(4\#(...))))}_{(2b)^2\ Operadores}$

64. Si $\overline{(x-1)} = x+1$

calcular: $\underbrace{\overline{\left(\cdots\overline{\overline{(x+5)}}\cdots\right)}}_{100\,Operadores}$

65. Sabiendo que: $\overline{(\widetilde{x+5})} = x-3$ y que $\widetilde{x+1} = x-5$

calcular: $\underbrace{\overline{\left(\cdots\overline{\overline{(x+1)}}\cdots\right)}}_{200\,Operadores}$

66. Si: $\overline{x+2} = x^2-1$

hallar: $\overline{4}^{\overline{4}} - \overline{7}$

67. Sabiendo que: $a \bigtriangleup b = 3(a+2)^2$

calcular: $\underbrace{1^2 \bigtriangleup \left(2^2 \bigtriangleup \left(3^2 \bigtriangleup \left(4^2 \bigtriangleup (\cdots)\right)\right)\right)}_{334\,Parentesis}$

68. Se define: $\overline{(x)} = \frac{x^2-9}{x+3};\ x \neq -3$ Y se cumple: $\overline{\left(\overline{\left(\overline{(2n+1)}\right)}\right)} = 16$

calcular: $\overline{(n^2-1)}$

69. Se define: $\overline{(x)} = \frac{x+1}{x-1};\ x > 1$ Hallar el valor de ?x?

si: $\overline{x}^2 + 2\overline{x} + 4 = 19$

70. Si: $\frac{a}{(b \triangleright a)^2} = \frac{1}{a \triangleright b}$

calcular: $\frac{10 \triangleright 4}{5 \triangleright 2}$

71. Si $\overline{(a)} = a + 2$

calcular: $\overline{(\widehat{10})}$ Sabiendo además que: $\widehat{a \triangleright b} = (a \triangleright b)^2 + 1$

72. Si $\overline{1} = 1$; $\overline{2} = 1$ y $\overline{n} = \overline{n+2} - \overline{n+1}$

calcular: $\overline{10}$

73. Dado: $\overline{x} = \sqrt{1 + \overline{x-1}}$ y $\overline{1} = 63$

calcular: $\overline{1999} - \overline{2000}^{\overline{4}}$

74. Se define: $(a \triangleright b)^c = a^{(b \triangle c)}$

calcular: $(1 \triangleright 2)^{(3 \triangleright 4)^{(5 \triangleright 6)^{\cdots (97 \triangleright 98)}}}$

6.1 Respuestas a los ejercicios del capítulo

1. 6
2. 3
3. 3
4. $\sqrt[5]{2^4}$
5. 3
6. 3^{120}
7. $5^{12} \cdot 7^{15}$
8. 3^{10}
9. 3
10. 0
11. $2 - \sqrt{3}$
12. $\sqrt{11} - 3$
13. $\sqrt{7} - \sqrt{3}$
14. $\sqrt{5} + 2\sqrt{2}$
15. $\sqrt{2} - 1$
16. $\sqrt{5} - \sqrt{2}$
17. $\sqrt{5} - 2$
18. $\sqrt{7} - \sqrt{6}$
19. $3 - 2\sqrt{2}$
20. $2\sqrt{2} - 3$
33. $7x7$
34. 1, pues la diagonal del conetendor es de 7m
35. 8 perros
36. 15
37. $81 = 4{,}5 * 18$
38. 25 %
39. 7
40. 7
41. 2047
42. 160
43. 99
44. 26
45. 25
46. 45
47. 781
48. 21
49. 26 y 9
50. 15 semanas
51. -32
52. $-\frac{A^3}{4}$
53. $32B - 384$
54. 24
55. 5^5
56. 315
57. 24
58. 437kg
59. 5^4
60. $3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7$
61.
62.
63. 3
64. $x + 205$
65. $x - 399$
66. 3
67. 27
68. 140
69. 2
70. 2 y 16
71. 103
72. 55
73. -1
74. 1

Bibliografía

[1] Kline, M. (1972). *El pensamiento Matemático de la Antigüedad a Nuestros Días.* Madrid: Alianza Universidad.

[2] Newman, R. (1968). *SIGMA: El Mundo de las Matemáticas.* México: Grijalbo.

[3] Baldor, A. (2001). *Aritmética Teórico Práctica.* México: 19 Ed. Publicaciones Cultural, S.A.

[4] Londoño, N. (1996). *Dimensión Matemática.* Medellín: Norma.

[5] Londoño, N. (1984). *Matemática Progresiva.* Medellín: Norma.

[6] Uribe, J. (1991). *Elementos de Matemáticas.* Medellín: Bedout.

[7] Vélez, A. (1989). *Álgebra Moderna.* Medellín: Editorial Universidad de Antioquia.

[8] Swokowski, E. (2009). *Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica.* México: Cengage.

[9] Stewart, J. (2012). *Precálculo, 6 Ed.* México: Cengage.

[10] Sullivan, M. (1997). *Precálculo, 4 Ed.* México: Prentise Hall.

[11] Hoffmann, A. (2014). *Matemáticas Aplicadas a la Administración y los Negocios*: McGraw-Hill Interamericana.

[12] Bello, I. (2008). *Matemáticas Básicas Universitarias*: McGraw-Hill Interamericana.

[13] Goñi, J. (2011). *Didáctica de las Matemáticas.* Madrid: Ministerio de Educación de España - Editorial GRAÓ, de IRIF, S.L.

[14] Guarín, H. (1987). *Introducción al Simbolismo Lógico.* Medellín: Norma.

[15] Guarín, H. (2000). *Introducción a los Sistemas Numéricos.* Medellín: Editorial Universidad de Antioquia.

[16] Wills, D. (1987). *Matemática Moderna Estructurada 1.* Medellín: Norma.

[17] Polya, G. (1965). *Cómo Plantear y Resolver Problemas.* México: Trillas.

[18] Arcila. M. (2012). *Micro de Matemáticas.* Recuperado de http://masweb.co/edu.

[19] Arcila, M. (2007). *Ejercicios de Matemáticas para Olimpiadas.* Recuperado de http://masweb.co/icfes.

[20] Wolfram, S. (2007). *Math.* Recuperado de https://www.wolframalpha.com/examples/Arithmetic.html

[21] Scrib. (2013). *Ejercicios de Matemáticas.* Recuperado de https://es.scribd.com/

[22] Borbón. (2014). *Edición de Textos Cientìficos.* Recuperado de http://tecdigital.tec.ac.cr

Marlon David Arcila Vanegas
Licenciado en Educación Matemáticas y Física de la Universidad de Antioquia, Especialista en Didácticas de las Ciencias, Matemáticas y Física, de la Universidad Pontificia Bolivariana. Docente de cátedra en la Universidad de Antioquia, Eafit, UPB, ITM, Pascual Bravo y Colmayor. Ha dedicado gran parte de su vida profesional en la implementación de las TIC a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, empleando software libre. Algunos de sus proyectos se pueden consultar en masweb.co.

marlon@csimedellin.com, mdav@outlook.com

Yeison Emilio Gomez Noreña
Matemático de la Universidad Nacional de Colombia, docente de cátedra en el Colegio Mayor de Antioquia y la Universidad Pontificia Bolivariana.

yegomezn@unal.edu.co



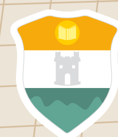


Aritmética
Teoría, ejemplos y problemas

Este texto ilustra conceptos básicos y necesarios de los cursos que emplean esta disciplina como lenguaje, para comunicar y representar las ideas de las matemáticas aplicadas, cuya base fundamental es la aritmética. También constituye un material de consulta obligado para los estudiantes que se enfrentan a las pruebas de Estado de la Calidad de la Educación Superior en Colombia, Saber pro, toda vez que contiene dos unidades que les facilita se preparación: proporcionalidad y operaciones básicas entre números reales.

This text illustrates basic and necessary concepts of courses which use this discipline as a language to communicate and represent the ideas of applied mathematics, whose basic foundation is arithmetic. In addition, this text is a primary reference for students who have to take the Saber pro exams (Pruebas de Estado de la Calidad de la Educación Superior en Colombia) since it has two units that can help for the preparation of these exams: proportionality and basic operations among real numbers.





INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA
COLEGIO MAYOR
DE ANTIOQUIA

ISBN 978-958-8743-94-3